様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 23 年　5 月 11 日現在

機関番号：５６２０３
研究種目：研究活動スタート支援
研究期間：2009～2010
課題番号：２１８４００５６
研究課題名（和文）　局所化定理による交叉理論の研究

研究課題名（英文）　Intersection theory via localization

研究代表者
佐藤　文敏（SATOU HUMITOSHI）
香川高等専門学校・一般教育科・講師
研究者番号：２０５４８３０９

研究成果の概要（和文）：David Mumford の論文“Towards an enumerative geometry of the moduli space of curves”にある公式を一般化した lambda 類と psi 類の間の帰納的ないくつかの公式を点付き安定曲線のモジュライ空間のグラフ空間に局所化定理を使って得た。また、Fulton-MacPherson 空間を相対化し相対 Fulton-MacPherson 空間を構成するとともに、その Chow Motive の公式を求めた。

研究成果の概要（英文）：We found new recursive formulas of intersections between lambda and psi classes, which generalized formulas in a paper “Towards an enumerative geometry of the moduli space of curves” by David Munford via applying the localization theorem to the graph space of a moduli of point stable curves. We also generalized Fulton-MacPherson configuration space to relative one and compute its Chow motive.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００９年度	870,000	261,000	1,131,000
２０１０年度	960,000	288,000	1,248,000
年度			
年度			
年度			
総　計	1,830,000	549,000	2,379,000

研究分野：数学
科研費の分科・細目：代数学
キーワード：局所化定理、 Gromov-Witten 不変量、Fulton-MacPherson 空間

１．研究開始当初の背景

1983 年のＤａｖｉｄ Mumford 氏の論文“Towards an enumerative geometry of the moduli space of curves”によってグラスマン多様体上の Schubert　Calculus の類似として点付き安定曲線のモジュライ空間の tautological 環の交叉理論の研究が始められた。また物理の弦理論では弦の動く空間が複素構造を持つとき，弦のファインマン積分の計算が点付き安定曲線または安定写像のモジュライ空間の積分で表せることから点付き安定曲線のモジュライ空間の交叉理論が重要になってきていた。

点付き安定写像のモジュライ空間から点付き安定曲線のモジュライ空間への自然な射で引き戻すことにより任意の複素多様体 X への点付き安定写像のモジュライの Chow 環および Cohomology 環で成り立つ普遍的な関係式が得られるので点付き安定曲線のモジュライ空間の Chow 環および Cohomology 環の構造が非常に重要である。

また, 2005 年に Tom Graber 氏, Ravi Vakil 氏らにより g+i 次の tautological 類は i+1 個の有理曲線を成分に持つ境界類で書き表せ

るということが示された。しかし，彼らの証明は具体的にどう書き表せるかということについてはなんら助けにならない抽象的な証明であった。したがってこの時までに知られていた具体的に境界類で書き表せる tautological 類は極，限られたものであり，またその証明も基本的には安定曲線のモジュライ空間から各安定曲線に対して Jacobi 多様体を対応させて全ての議論を偏極 Abel 多様体のモジュライ空間に置き換えて証明するというものしか根本的には知られていなかった。したがって種数が 2 以下の安定曲線のモジュライ空間の tautological 類の交点理論からわかるものしか知られていなかった。

２．研究の目的

研究開始当初の背景にも述べたように重要性が高いにも関わらず、具体的な計算は非常に難しいことが一般的に知られていた。(Xiaobo Liu, Rahul Pandharipande "New topological recursion relations" 参照)そこで１点付き安定曲線のモジュライ空間で定義される lambda 類と psi 類の具体的な交わりを求める公式を得ることが目的であった。

具体的には１点付き安定曲線のモジュライ空間 $M_{g,1}$の tautological 環の交点理論について具体的な類の中で１番簡単なものうちの１つ，つまり１つの lambda 類と psi 類の積で表される次数 g の類を具体的な境界類で表すことを第一目標とした。

また，tautological 環の計算の応用として複素多様体の上の与えられた交点条件を満たす曲線のヴァーチャルな数として定義される Gromov-Witten 不変量を具体的に計算し，与えられた条件を満たす曲線の数をヴァーチャルではなく実際に数えることが第二の目標である。

しかし，普通の Gromov-Witten 不変量を定義する点付き安定写像のモジュライ空間においては曲線の成分が 1 点につぶれたり，自己同型群を持ったりして実際の自分がもとめたい条件を満たす曲線の数とは隔たりが出来，補正をしなくてはいけない。二つ目の自己同型群を持つ場合の補正はあまり難しくないが，曲線の成分が１点につぶれる場合の補正は非常に難しくなる。したがって，曲線の成分がつぶれないような点付き写像のモジュライ空間の構成が必要だと思った。そのためには Eleny-Nicoleta Ionel 氏, Thomas Parker 氏, Jun Li 氏らによって構成された相対 Gromov-Witten 不変量を定義するために用いられた点付き相対安定写像のモジュライ空間の一般化をする必要があった。

３．研究の方法

R. Pandaripande 氏と Y. P. Lee 氏の両氏による全ての Gromov-Witten 不変量の理論は局所化定理で証明されるべきだという思想がある。この思想に則り、局所化定理を使い交点数を求める。

そこで Alexander Givental 氏による Mirror 対称性の証明のキーポイントとして使われた種数０の点付き安定写像のモジュライ空間のグラフ空間への局所化定理の応用方法を用いる。また，この手法は Aaron Bertram 及び Holger Kley により相対化および簡易化され Chow 環および Cohomology 環にも応用できるようになっていた。

残念ながらこのグラフ空間は種数１以上かつ複素多様体 X の次元が１以上の時には定義はされるが局所化定理の計算が上手く出来ないということがあった。ここを打開するためにはも新しい条件を満たす安定写像のモジュライ空間の構成が必要であった。そのためにも既に述べた相対安定写像のモジュライ空間の構成を再度見直す，つまり再構成し，新しい条件を発見し，新しいモジュライ空間を構成する必要があった。

そこで William Fulton 氏，Robert MacPherson 氏らによって 1994 年に定義された Fulton-MacPherson 空間と言われる n 点の配置空間のモジュライ空間がある。

点付き相対安定写像のモジュライ空間の定義において値域として使われたアルティンスタックである $M_{0,3}$ の代わりに Fulton-MacPherson 空間の相対化を使い点付き相対安定写像のモジュライ空間を再構成しようとした。

そこで Fulton-MacPherson 空間を相対化するために Corrado De Concini, Claudio Procesi, Li Li らによって開発された Wonderful compactification というコンパクト化を使う。

４．研究成果

(1) Daniele Aracara 氏と伊藤由佳里氏と共同して lambda 類と psi 類の具体的な交わりを求める帰納的な公式をいくつか得た。

具体的には１点付き安定曲線のモジュライ空間 $M_{g,1}$ において $\phi^g-\lambda_1\phi^{g-1}+\cdots+\lambda_g$ を具体的な境界類で書き表す公式を Daniele Arcara 氏得た。また，この公式は点付き安定曲線のモジュライ空間の tautological 環において初めての完全に帰納的な公式になっている。また，David Mumford 氏の原論文 "Towards an enumerative geometry of the moduli space of curves"にはこのタイプの tautological 類は境界類になることが示されているが種数２までしか具体的に境界類で書かれていなかったため，それを任意の種数にまで拡張し

たことは大変大きな反響を得た。

その後，伊藤由佳里氏を加え d=2,3 の場合について(dφ)^g-λ_1(dφ)^{g-1}+・・・+λ_g を具体的な境界類で書き表す公式を求めるアルゴリズムを得た。しかし，最初に得たアルゴリズムは局所化定理で現れる固定点集合の成分の数が大変多く実際に計算するには難しいと思い，固定点集合の成分を減らすように違う組み合わせを考えるのに大変時間を要した。したがって当初の予定より遅れ，今現在固定点集合の成分の法線 vector 束の Chern 類を計算しているところである。

(2) Bumsig Kim 氏と共同して相対 Gromov-Witten 不変量の構成を見直した、つまり相対点付き安定写像のモジュライ空間の構成を再構築するために Fulton-MacPherson 空間の一般化（相対化）を構成した。具体的な構成方法はXを複素多様体として D をその上の因子とする。X^n に対して先ずは因子 D と X との積で表される部分集合の族による Wonderful Compactification X^n_D をとり，その空間内の X^n から対角集合の族の~変換による像の族による Wonderful Compactification X_D[n]を構成する。この２段階の Wonderful Compact 化で求めたい空間，つまり Fulton-MacPherson 空間の相対化が構成できた。(Bumsig Kim, Fumitoshi Sato, “A generalization of Fulton-MacPherson configuration spaces”)

また Li Li による Wonderful Compactification の Motive に関する一般的な公式がこの 2 段階の Wonderful Compactification にも使えることを示すことによって相対 Fulton-MacPherson 空間の Chow Motive を X^n の Chow Motive から求めるための公式も得た。今現在，Chow Motive についての結果(Fumiothsi Sato, “The Chow motives of relative Fulton-MacPherson space”)は雑誌に投稿中である。

また，この相対 Fulton-MacPherson 空間を使って共同研究者である Bumsig Kim 氏は当初の目標である点付き相対安定写像のモジュライ空間の再構成を行い，新しい条件の安定写像のモジュライ空間を構成した。(Bumsig Kim, “Stable quasimaps to holomorphic symplectic quotients”, “Logarithmic Stable Maps”)

(3) 上記の結果および手法をもっといろいろなところに応用するために現在、Daniele Arcara 氏，伊藤由佳里氏，Bumsig Kim 氏，Israel Vainsencher 氏との共同研究をしている。

具体的には Daniele Arcara 氏，伊藤由佳里氏とは上記した結果の一般化を継続して研究している。つまり M_{g,1}において任意の d についてφ^g-λ_1φ^{g-1}+・・・+λ_g を境界類で書き表す帰納的な公式を計算するためのアルゴリズムを探している。これができれば Vandermonde の行列式が 0 でないことより，逆行列が存在し g 次以上の１つの lambda 類と１つの psi 類の積全てが任意の種数について具体的に境界類で書ける公式を得ることができる。

次に Bumsig Kim 氏とは X を複素多様体，G を X に作用する単純群としたとき，X の G による商 X//G（非 Abel 商）と G のあるトーラス T による商 X//T(Abel 商)が考えられるがこの２つの空間の orbifold cohomology 及び量子 cohomology 環の関係性を見つけ出そうとしている。

orbifold cohomology についてはどの multi-sector 同士が対応するかという関係性がわかったのでこれから vector 束の Chern 類の比較をしていきたい。またそれが終わったら，量子 cohomology 環および orbifold 量子 cohomology 環の関係性を見出していきたい。しかしそのままでは上手くいかないと思われている。Kentaro Hori 氏により量子 cohomology 環をそのまま比較するのではなく Mirror 対称性と同様に 1 点の Gromov-Witten 不変量の母関数として定義される J 関数同士を比較すると見通しがよいといわれている。X が C^n で G が SL(n, C)のときには非 Abel 商がグラスマン多様体になり，Abel 商が射影空間の積になる。この時はそれぞれの空間は良く知られた空間であるため各々の J 関数を関連性を無視して計算するとちょうど Hori 氏が予想した通りの関係性を持つことが Aaron Bertram, Ionut Ciocan-Fontanine, Bumsig Kim “Two proofs of a conjecture of Hori and Vafa”, “Gromov-Witten invariants for abelian and non-abelian quotients”の一連の論文で示された。しかし，それぞれの空間に関連性を考えずに J 関数を計算した結果のため他の Abel 商と非 Abel 商の比較への一般化の方法についてはこの証明は何も示唆しない。そこで Abel 商と非 Abel 商への１点付き安定写像のモジュライ同士を直接比較し，局所化定理で求まる固定点集合がどのように対応し，その法線 vector 束の Chern 類がどう対応するのかを調べて任意の Abel 商と非 Abel 商の J 関数を比較したい。そのために，申請者が博士論文で確立した局所化の手法を使っていきたい。

また Israel Vainsencher 氏とは 3 次元射影空間への点付き安定写像のモジュライ空間のグラフ空間への局所化定理の応用として種数０つまり有理曲線で与えられた位数の自己同型群をもつものの数を計算しよう

としている。今現在のところ一番簡単な例である位数が２の自己同型群を持つ有理曲線の数をGromov-Witten不変量の言葉に翻訳し終え，今そのGromov-Witten不変量を局所化定理を用いて計算している最中である。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）
Kim, Bumsig; Sato, Fumitoshi: “A generalization of Fulton-MacPherson configuration spaces”, Selecta Mathematica (N. S.) 15 (2009), no. 3, 435-443
Arcara, Daniele; Sato, Fumitoshi: “Recrusive formula for φ^g- λ_1 φ^{g-1}+・・・+λ_g in M_{g, 1}”, Proceedings of American Mathematical Society, 137 (2009), no. 12, 4077-4081
〔学会発表〕（計２件）
佐藤　文敏　“A generalization of Fulton-MacPherson spaces”代数幾何の関連する諸分野，2010年8月30日，北海道大学
佐藤　文敏“Enumerative geometry of moduli of curves and Gromov-Witten invariants”, Workshop on Schubert Calculus, 2009年9月23日，倉敷シーサイドホテル

〔図書〕（計０件）
〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）
○取得状況（計０件）

〔その他〕
ホームページ等
http://www.kagawa-nct.ac.jp/prospectus/publication/kouhou.html

６．研究組織
(1)研究代表者
佐藤　文敏（SATOU　HUMITOSHI）
香川高等専門学校・一般教育科・講師
研究者番号：２０５４８３０９
(2)研究分担者
無し
(3)連携研究者
無し