



研究課題名 周期の理論と双有理幾何学の融合、ミラー対称性数学の深化と探索

大阪大学・大学院理学研究科・教授

たかはし あつし
高橋 篤史

研究課題番号： 21H04994

研究者番号： 50314290

研究期間： 令和3年度～令和7年度 研究経費（期間全体の直接経費）： 86,700千円

キーワード： 複素幾何学、双有理幾何学、ミラー対称性

【研究の背景・目的】

幾何学的対象には大きさや形といった特徴を反映する量がある。長方形を考えたとき、(縦の長さ)×(横の長さ)と(縦の長さ)÷(横の長さ)が大きさや形をあらわす。ここで横の長さを逆数にした長方形を考えると、大きさ・形はもとの長方形の形・大きさとなる。つまり、大きさや形の役割が入れ替わった長方形の組ができる。ミラー対称性とは、この例のような、二種類の幾何学的特徴の役割を交換する対称性のことである。

より正確に述べると、ミラー対称性は、シンプレクティック幾何学に対応するAモデルと複素代数幾何学に対応するBモデルという、二つの位相的弦理論の等価性である。ミラー対称性は定性的・定量的な多くの重要な着想・予想を与え、幅広い数学分野を関連させ、新たな知見とともに既存の数学を一層深める。「物理的着想・対象・手法」を数学に取り入れつつ、ミラー対称性の背後にある数学的真理を解明するのは極めて興味深い問題である。

現在とくに重要な課題が二つある。一つは、ホモロジー的ミラー対称性の証明、AモデルおよびBモデルに対して独立に構成される圏の同値性の証明である。もう一つは古典的なミラー対称性(Gromov-Witten 不変量の理論に対する周期の理論と変形理論に対する周期の理論の同型)をホモロジー的ミラー対称性から導出すること、とくに原始形式・平坦構造(Frobenius構造)の函手的導出と Bridgeland 安定性条件の空間上大域的な平坦構造の構成、である。これらの課題の解決に向けて、近年重要な成果が続々と得られている。

一方、極小モデル理論のさらなる理解のため、ホッジ構造・圏論的手法に基づく双有理幾何学研究が活発に行われている。さらに、圏論的力学系という導来圏の新たな研究手法が最近登場したが、これも圏論的手法や周期の理論による双有理幾何学研究の重要性を示唆している。

本研究課題の目的は、周期の幾何学的理論と双有理幾何学を融合し、ミラー対称性現象の一層深い理解と古典的重要問題に対する大きな貢献をもたらす、新たな数学を拓くことである。とくに、学術的「問い」:

1. 三角圏・導来圏はどの程度の幾何学的情報を持っているのか?
2. 代数多様体・導来圏を分類することは可能か?
3. 平坦構造(Frobenius構造)を支配する幾何学的構造・可積分系の構造は何か?

に対する諸問題について、既存の成果・手法を飛躍的に発展させることを目的とする。

【研究の方法】

上記の学術的「問い」に対する以下の3課題における諸問題の解決に取り組む:

1. 周期の理論の着想に基づく、Bridgeland 安定性条件・圏論的エントロピーの研究推進。
2. ホッジ構造・圏論的手法による、双有理幾何学とくに極小モデル理論研究の推進。
3. Gromov-Witten 理論・Weyl 群不変式論・変形理論を関連付ける、周期写像の理解。

具体的には、以下の方法で計画を遂行する。

- ① 研究代表者・研究分担者・研究協力者(共同研究者)らからなる研究体制による、諸問題の解決に向けた個別・共同研究。
- ② 博士研究員の雇用による、本研究課題の研究促進とさらなる発展・当該研究分野の活性化。
- ③ 大阪大学・京都大学におけるセミナー・勉強会の定期的開催、国際研究集会の年次開催による、研究交流および研究成果の発信。また、これらを通じた、ミラー対称性を核とする周期の理論と双有理幾何学の研究拠点形成。

【期待される成果と意義】

ミラー対称性研究における最先端の重要諸課題に大きな寄与が期待されるだけでなく、100年以上の歴史がある数学の古典的・伝統的問題に新たな知見がもたらされる。とくに、双有理幾何学研究に対する新たな不変量・手法の提供、離散群・特異点・ルート系・有限次元代数の間にある不思議な関係の解明、に対する大きな貢献が期待される。

さらに、本研究課題を通じて、代々受け継がれてきた数学的伝統を次世代に継承するとともに、独創的で優れた研究を日本から世界に発信してゆく。

【当該研究課題と関連の深い論文・著書】

- ・ KIKUTA Kohei, OUCHI Genki, TAKAHASHI Atsushi, Serre dimension and stability conditions, *Mathematische Zeitschrift* (2021), published online (March 4, 2021), doi:10.1007/s00209-021-02718-6
- ・ 高橋 篤史著, 原始形式・ミラー対称性入門, 岩波数学叢書, 岩波書店, ISBN: 9784000298285, 2021年4月9日刊行

【ホームページ等】

http://www4.math.sci.osaka-u.ac.jp/~takahashi/project_takahashi@math.sci.osaka-u.ac.jp