

令和 6 年 6 月 10 日現在

機関番号：32704
研究種目：基盤研究(C) (一般)
研究期間：2021～2023
課題番号：21K03204
研究課題名(和文)ディリクレ関数の零点分布

研究課題名(英文)Zero distribution of Dirichlet L-functions

研究代表者
宗野 恵樹 (SONO, Keiju)

関東学院大学・理工学部・准教授

研究者番号：10735989
交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,200,000円

研究成果の概要(和文)：当研究では、ディリクレ関数や保型L関数などの数論的な意味をもつL関数の解析的性質を研究した。特に原始的指標に付随するディリクレ関数の零点分布や、ディリクレ関数の積分モーメントと零点密度との関係性、 $GL(4)$ の保型L関数の中心線上の2乗平均の漸近公式の導出などを行った。これらの研究成果は4本の論文にまとめ、そのうちの3本は国際的な専門誌に掲載された。

研究成果の学術的意義や社会的意義
ディリクレ関数や保型L関数などの各種L関数は等差数列中の素数分布の研究など、数論における基礎的な問題に幅広く応用されており、それらの研究は楕円曲線暗号、RSA暗号の開発など、われわれの現実生活に直接関わる様々なツールに実用化されている。当研究も、整数論の基礎的な問題への応用の可能性は十分にあり、それらが長期的に見え現実の諸問題を解決ないし改善する上での鍵となることが大いに期待される。

研究成果の概要(英文)：I studied analytic properties of Dirichlet L-functions and automorphic L-functions, which are associated to arithmetic objects. In particular, I studied zero distribution of primitive Dirichlet L-functions, the relation between moment of L-functions and zero density of L-functions, and the second moment of $GL(4)$ -automorphic L-function on the critical line. I wrote totally 4 papers on these theme and published three of them.

研究分野：解析的整数論

キーワード：ディリクレ関数 保型L関数 素数分布 積分モーメント 解析的整数論

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

リーマンゼータ関数やディリクレ L 関数、保型 L 関数などの各種 L 関数は素数分布などの整数論における基礎的な問題と密接に関連しており、それらの解析的な性質は整数論の重要な研究テーマと考えられている。特にこれらの L 関数の零点分布、臨界領域における振る舞い、中心値、臨界線上の関数の大きさなどは素数分布論に応用する上できわめて重要であり、多くの研究者が複素関数論、調和解析、関数解析、あるいは群論や表現論などの代数的な手法など様々な方法で研究に取り組んでいる。

2. 研究の目的

当研究では、リーマンゼータ関数をはじめとする様々な L 関数の解析的性質を明らかにし、それを素数分布などの整数論の諸問題に応用することを目的とする。特に実指標に付随するディリクレ L 関数の中心点 $s=1/2$ 上の 2 乗平均、GL(4)の保型 L 関数の中心線上の積分モーメントの評価、ディリクレ L 関数の零点分布などを研究対象とする。

3. 研究の方法

まず、実指標に付随するディリクレ L 関数の中心点上の 2 乗平均の評価では、Young が 1 乗平均と 3 乗平均で用いた手法が 2 乗平均でも通用するかを確認し、その場合漸近公式の誤差項がどの程度小さくなり得るかを研究する。

GL(4)の保型 L 関数の積分モーメントの研究では、保型 L 関数のディリクレツイストの、指標と導手に関する平均を評価する。積分の大きさに一定の仮定を設けた上で、積分の漸近的な振る舞いを明らかにし、特に主要項の係数がランダム行列理論から予想される値に一致することを証明する。

ディリクレ L 関数の零点分布の研究では、Feng の方法と篩法の組み合わせにより、原始的指標に付随するディリクレ L 関数の自明でない零点のうち一定割合が関数等式の中心線 $\text{Re}(s)=1/2$ 上にあることを証明する。また、Bourgain や Heath-Brown の方法を組み合わせ、ディリクレ L 関数の零点密度の評価を行う。

4. 研究成果

まず、論文[1]において、ディリクレ L 関数の零点密度を評価した。特に積分モーメントのサイズと L 関数の零点密度との関連性を明らかにした。

次に、論文[2]では、GL(4)の保型 L 関数の 2 乗積分モーメントに関して、積分の大きさに関するある仮定の下で漸近公式を導出した。特に、主要項にかかる係数がランダム行列理論から予想されるものと等しいことを明らかにした。

論文[3]では、原始的指標に付随するディリクレ L 関数の自明でない零点のうち少なくとも 61% 以上は関数等式の中心線 $\text{Re}(s)=1/2$ 上にあり、少なくとも 60% 以上は中心線上の単純零点であることを証明した。

論文[4]では、様々な長さの正方形がある特定の正方形に詰め込まれるための十分条件を明らかにした。特に辺の長さが素数から定義される場合や等差数列から与えられる場合を検討した。また、これらの研究に関して国内の研究集会で数回の発表を行った。

発表論文(2021 年以降)

[1] Moments and zero density estimates for Dirichlet L-functions
Keiju SONO
TURKISH JOURNAL OF MATHEMATICS 45(5) 2050-2072 (2021)

[2] The second moment of Dirichlet twists of a GL4 automorphic L-function
Keiju SONO

Mathematische Zeitschrift 305(37) (2023)

[3] More than 60% of zeros of Dirichlet L-functions are on the critical line

Keiju SONO

arXiv:2105.07422

[4] Perfectly packing a square by squares of sidelength $f(n)^{-t}$

Keiju SONO

Discrete Mathematics 346(4) 113293 (2023)

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Keiju Sono	4. 巻 346
2. 論文標題 Perfectly packing a square by squares of sidelength $f(n)^{-t}$	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Discrete Mathematics	6. 最初と最後の頁 113293
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.disc.2022.113293	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Keiju SONO	4. 巻 45
2. 論文標題 Moments and zero density estimates for Dirichlet L-functions	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 TURKISH JOURNAL OF MATHEMATICS	6. 最初と最後の頁 2050-2072
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3906/mat-2104-29	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計1件（うち招待講演 1件/うち国際学会 0件）

1. 発表者名 宗野恵樹
2. 発表標題 The second moment of Dirichlet twists of a $GL(4)$ -automorphic L-function
3. 学会等名 第15回ゼータ若手研究集会（招待講演）
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

特になし。

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------