様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６ 年　６ 月 １４ 日現在

機関番号：１２６０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2021～2023
課題番号：２１Ｋ０３２４３

研究課題名（和文）トンプソン群の背後にある空間と構造の探索

研究課題名（英文）Looking for spaces and structures behind the Thompson groups

研究代表者
金井　雅彦（Kanai, Masahiko）

東京大学・大学院数理科学研究科・名誉教授

研究者番号：７０１８３０３５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,100,000円

研究成果の概要（和文）：トンプソン群 F が作用する空間として以下のものを構成した：(I) ある束順序化群 (lattice-ordered group) の Dedekind-MacNeille 完備化；(II) ある無限次元アフィン空間内の適当な領域；(III) ある無限次元球面内の適当な領域．とくに (I) を用いて McClearyーRubin による定理の別証明を与えることができた．一方，(II) に関しては，基本領域を決定し，さらに不変測度の構成を行った．この他にトンプソン群 T の区分的整射影的実現に付随して得られるある無限次元群についても考察を加えた．

研究成果の学術的意義や社会的意義
現時点までに得られた成果は，残念ながらさして満足のいくものではないというのが正直なところである．しかし，この方向に研究を続けていけば，近い将来大きな成果をあげられると期待している．とくに，トンプソン群が作用する空間の上で調和積分論を展開することができれば，数学に大きな進展をもたらすであろう．

研究成果の概要（英文）： As spaces on which the Thompson group F acts, we constructed the following ones: (I) The Dedekind-MacNeille completion of some lattice-ordered group; (II) A domain in some infinite-dimensional affine space; (III) A domain in some infinite simensional sphere. As an application of (I), we gave an alernative proof of the theorem of McCleary-Rubin.
Meanwhile, as to (II), we determined a fundamental domain, and constructed an invariant measure. In addition, we made considerations which arise from the piecewise integral projective realization of the Thompson group T.

研究分野：幾何学

キーワード：トンプソン群

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C-19, F-19-1, Z-19 （共通）

１．研究開始当初の背景　Gromov が幾何学的群論を創始してすでに四十数年が経過した．その幾何学的群論であるが，いうまでもなく離散群を主たる研究対象とする．しかし，離散群を主たる研究対象とするのは，幾何学的群論が最初ではない．幾何学的群論に先行すること三，四十年，組合せ群論と呼ばれる分野が存在した．この組合せ群論は，オイラー数やエンドなどといった位相幾何学の概念を離散群，あるいはそれに付随して定まるケーリーグラフなどの複体に対して考察することから始まった．その起源からして組合せ群論は位相幾何学的色彩が強い.（その他に，語の問題などの数学基礎論的な嗜好を有する問題も組合せ群論に含まれると考えられることも少なくないが.）位相幾何学に変えて双曲性（ = 負曲率性）などといった微分幾何学的概念を離散群の世界に移植することにより創始されたのが幾何学的群論である．その登場以降，組合せ群論を併合した形で幾何学的群論は進化を続けてきた．その基本的な方法として，微分幾何学に起源を有する諸概念の離散アナログ，その背後にある距離空間に対する疎 (coarse) 幾何学的視点，組合せ群論に起源を有する位相幾何学的観点，そしてこれらに加えて組合せ論的な，例えば数え上げといった手法が挙げられる．ここに挙げた手法，あるいは視点はすべて組合せ論的，離散的である．

このこと自体は幾何学的群論の歴史を考えると当然のことである．しかし，幾何学的群論以外にも，離散群を扱ってきた分野がある．そしてそこでは，非組合せ論的，非離散的視点・手法が積極的に採用されてきた．一例を挙げよう．リー群の格子に関する一連の研究がそれである．1960 年頃の Selberg の仕事から始まり，Weil の局所剛性定理，Mostow の強剛性定理などを経由して Marugulis の超剛性定理という大輪の花を咲かせたのがこの分野である．リー群の格子は疑いなくもっとも「上質」な離散群の一種である．そして，その研究においては,（離散的・組合せ論的ではなく連続的な）幾何や解析，さらには力学系理論やエルゴード理論が必要不可欠の役割を果たす．それに反し組合せ論的な議論はまったくといっていいほど出番がない．さらに，リー群の格子は，例えば保型形式理論の舞台として数論においても姿を現すが，やはり，離散的なものよりは連続的なもののが優先すると言う事情は変わらない．リー群の格子のような上質の離散群に対しては，このように多岐に渡る観点・方法がその背後に存在する．

単に離散群と言ったときには，その背後に貧相な空間や構造しか持たないものが少なくないのは間違いなかろう．そんな群に対しては，組合せ論的な手法以外に手がかりがないこともまた当然と思える．しかし，リー群の格子や写像類群といった「極上」の離散群に関しては話はまったく異なることは，すでに述べた通りである．いままでのところ，トンプソン群に関しても,「平凡」な群と同様，組合せ論的議論が圧倒的に先行している．例えば，トンプソン群が作用する空間として Daniel Farley によって考案された複体があるが，それもまた組合せ論的対象である．しかし，トンプソン群は決して「平凡」な群では

ないとわたしは信じる．トンプソン群の背後に（離散的・組合せ論的ではない）豊穣な空間とそこに棲息する多様性に富んだ構造たちの存在が予感される．

２．研究の目的　離散群を扱う際のもっとも標準的な手段は，その群が作用する適当な空間を導入し，その作用から群に関する情報を抽出するというものである．この手続きにおいては，空間とそこへの群作用は，離散群の構造を解析するためのものである．最大の関心はあくまで離散群に向けられる．しかし，本研究においては群自体はむしろ副次的な対象とする．それに代え，群が作用する空間とそれが有するべきなんらかの構造に最大の興味を向ける．離散群の背後にある未知の空間，およびその上に棲息する新奇な構造たちの発見こそが本研究計画の究極的な目標であった．あくまで，離散群にはそこに至る道のりとしての役割を期待するのみである．本研究課題においては，とくにトンプソン群に対しこのプログラムの実現を試行した．なお，ここで想定している「空間」は，グラフ，複体などの組合せ論的，離散的なものではなく,（無限次元）多様体や関数空間の中の領域などの「連続的」な対象であることを断っておきたい．

３．研究の方法　Richard Thompson が導入した 3 種の無限群 — それらはしばしば F, T, V と表記される — のうち，まずはとくに F に焦点を当てて説明を行うことにしたい．その定義から始めよう．閉区間 $[0,1]$ からそれ自身の上への向きを保つ同相写像 γ であって，以下の 3 つ条件を満たすもの達がなす群がトンプソン群 F である：i) γ は区分的に線形である；ii) $p \cdot 2^q$ $(p, q \in \mathbb{Z})$ の形をした有限個の点においてのみ γ は微分不可能である；iii) 微分可能な点における γ の傾きは 2^p $(p \in \mathbb{Z})$ である．

実は F が作用する空間のひとつの例として以下の様なものを発見した：

(I) ある束順序化群 (lattice-ordered group) $\mathcal{A}$ の Dedekind–MacNeille 完備化 $\bar{\mathcal{A}}$.

以下において，この空間 (I) について説明したい．区間 $[0,1]$ の向きを保つ自己同相写像全部がなす群を $\mathcal{H}$ とする．そのふたつの元 f, g に対し，$f(x) \le g(x)$ $(\forall x \in [0,1])$ のとき $f \le g$ と定義すれば，これは $\mathcal{H}$ の（半）順序である．しかも，$\mathcal{H}$ の 2 元 f, g からなる集合 $\{f, g\}$ に対し，その上限 $f \vee g$, 下限 $f \wedge g$ が $\mathcal{H}$ の元として自然に定まる．すなわち，$\mathcal{H}$ はこの順序に関し束 (lattice) となる．しかも，この順序は $\mathcal{H}$ の群構造と「整合的」である．すなわち，$\mathcal{H}$ はいわゆる束順序化群 (lattice-ordered group) である．そして，トンプソン群 F はその束順序化部分群である.[1] $\mathcal{H}$ の元であってそれ自身もまたその逆写像もリプシッツ連続なものがなす束順序化部分群を $\mathcal{A}$ とする．わたしの議論においては，$\mathcal{H}$ ではなくこの $\mathcal{A}$ が重要な役割を果たす.[2] そして，それにも増して重要なのは，$\mathcal{A}$ の束と

[1]前世紀中盤，束は数学者たちの注目をそれなりに集めたようである．しかし，近年においてはむしろ忘れられた存在に近いのかも知れない．そういったこともあってか，トンプソン群が束順序化群であるというありふれたものであるべき指摘も，わたし自身はトンプソン群に関する文献のなかで一度も目にしたことがない．このこともトンプソン群に対する研究が偏った視点からなされている恐れがあることに対する傍証と感じられなくもない．

[2]$\mathcal{A}$ はトンプソン群 F を ‘cobounded’ な離散部分群として含む「連続群」である．$\mathcal{A}$ と F の組はリー群とその格子を想起させる．

しての Dedekind–MacNeille 完備化 $\bar{\mathcal{A}}$ である．完備化は束としてなされたものであり，$\bar{\mathcal{A}}$ はもはや群ではない．しかし，$\mathcal{A}$ のそれ自身への（左からの）作用は完備化 $\bar{\mathcal{A}}$ への作用に拡張できる．しかも，$\mathcal{A}$ だけでなく $\bar{\mathcal{A}}$ もあるバナッハ空間 B に埋め込むことができる．そして，その埋め込みの像は B の原点を中心とした単位閉球体 B_1 に一致する．一方，B に自然に導入されるある弱い位相に関し B_1 はコンパクトである．このことから，$\bar{\mathcal{A}}$ は $\mathcal{A}$ の束としての完備化であるのみでなく，ある自然な位相に関する $\mathcal{A}$ のコンパクト化でもあることが分かる．$\bar{\mathcal{A}}$ こそが，われわれが独自に発見した，トンプソン群 F が作用する空間の最初の例である．

ところで，この $\bar{\mathcal{A}}$ を見て何か思い出さないだろうか？　そう，双曲空間のコンパクト化である．n 次元双曲空間 $\mathbb{H}^n$ は n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の単位開球体として実現される．そして，その $\mathbb{R}^n$ の中での閉包 $\overline{\mathbb{H}}^n$ が双曲空間 $\mathbb{H}^n$ のコンパクト化に他ならない．コンパクト化を構成するに際して導入された理想境界 $\partial\mathbb{H}^n = \overline{\mathbb{H}}^n \setminus \mathbb{H}^n$ — その点は双曲空間から見れば無限遠方にある — は，本研究計画の「誕生の地」とも言えるものである．

本研究計画の立案にあたってもっとも基本的なモデルの役割を果たしたのが，この理想境界 $\partial\mathbb{H}^n$ とそこへの格子の作用であった．理想境界 $\partial\mathbb{H}^n$ は微分可能多様体としては単なる $n-1$ 次元球面である．しかし，それには共形構造が付与されている．そのお陰で始めて理想境界上でも十分に豊かな幾何や解析，さらにはエルゴード理論や力学系理論を展開することが可能となる．双曲空間に代えて別の階数 1 の非コンパクトリーマン対称空間をとれば，その理想境界が有する幾何構造は「退化した共形構造」，すなわち，劣リーマン計量 (sub-Riemannian metric) で表されるような共形構造となる．さらに，双曲空間に代えて階数が 2 以上の非コンパクトリーマン対称空間をとれば，共形幾何に代えて一種の射影幾何が無限遠方に発現する．ティッツ幾何と呼ばれるものがそれである．わたしの真の目的はリー群の格子に代えトンプソン群に目を向けることにより，未知の空間とその上に見出される新奇な構造，そしてそれを用いて展開される独創的な幾何や解析等を追い求めることにあった．

４．研究成果　ここで Mostow の剛性定理に関する補足をふたつほど述べたい．第一に，Mostow の剛性定理は $n = 2$ のときには成立しない．それ故に，リーマン面のタイヒミューラー空間やリーマンモデュライ空間が意味を持つのである．第二の補足は，Mostow の剛性定理から従う次の主張である：仮定 $n \geq 3$ の下，$G = Iso(\mathbb{H}^n)$ のココンパクト格子の外部自己同型群は有限である．この主張もまた $n = 2$ においては偽である：なぜなら，写像類群が無限群であるからである．

さて，話を再びトンプソン群に戻そう．トンプソン群 F の外部自己同型群に関しても，それが有限群 — 実際には位数 2 の巡回群 — であることが Matthew Brin により証明されている．トンプソン群の専門家である愛媛大学の加藤本子氏とともに取り組んだのが，この Brin の定理の別証明である．いま，F の自己同型 ι が与えられたとする．$h \circ \gamma(x) = \iota(\gamma) \circ h(x)$ $(\gamma \in F,\ x \in [0,1])$ なる $[0,1]$ の自己同相写像 h の存在を示すの

が第 1 段である．そして，この h がトンプソン群 F の元であるか，あるいは区間 $[0,1]$ の反転写像 $x \mapsto 1-x$ と F の元との合成であることを示すのが第 2 段である．実際，Brin 自身が証明したのは第２段のみであり，第１段は McCleary–Rubin によるものである．Brin 自身は自覚していないようにも見えるが，この Brin の定理の証明の大局的な構成は Mostow の剛性定理のそれとかなり似かよったものである．なお，McClearly–Rubin による第１段は $\bar{A}$ を用いて再証明できることが判明した.[3] さらに第２段も $\bar{A}$ を用いて証明できることを期待して研究を続けたが，残念ながらその目論見はいまだ実現していない．

トンプソン群が作用する (I) 以外の空間として，

(II) ある無限次元アフィン空間内の領域 $\mathcal{B}$

を構成した．トンプソン群 F は $\mathcal{B}$ にアフィン変換として作用する．この作用に関し，基本領域を決定することができた．また，この無限次元空間 $\mathcal{B}$ 上に F の作用で不変な測度を構成した．ゆくゆくは，$\mathcal{B}$ 上で調和積分論を展開できればと目論んでいる．

(II) に類する空間として，もうひとつ

(III) ある無限次元球面内の領域 $\mathcal{C}$

を構成した．ただし，現時点では空間の構成にとどまり，その重要性に関する考察や応用にまで手を広げることはできていない．

さらに，昨年度後半に知ったのが，William Thurston によるトンプソン群 T の区分的整射影的 (piecewise integral projective) 実現である．この実現に基づくことにより，

(IV) 円周 S^1 の向きを保つ区分的射影的 (piecewise projective) な同相写像全部がつくる無限次元群 $\mathcal{P}$

に T を埋め込むことができる．Peter Greenberg は $\mathcal{P}$ を利用して T のホモロジー群に関する考察を行なっている．ところで，この Thurston によるトンプソン群 T の区分的整射影的実現において鍵となるのが，ファレー図式と呼ばれる複体である．このファレー図式は，トンプソン群の文脈以外にも，Penner による普遍タイヒミュラー空間論や，Hatcher による２次形式に関する研究にも登場する．一見無関係にも見えるこれらの話題の背後になにか大きな普遍的存在が横たわっているのではないだろうか．そのようなこともあり，わたし自身も $\mathcal{P}$ の構造についての研究を開始したが，現時点ではまだ本質的な成果を得るには至っていない．

[3]「空間から作られた代数的対象から空間が再現可能である」という形の定理が前世紀中盤にいくつも証明された．一例を挙げよう．コンパクトハウスドルフ空間 X に対し，その上の連続関数のなす代数 $C(X)$ が定義される．ただし，$C(X)$ における積は関数の各点ごとの積を使って定義する．このとき，ふたつのコンパクトハウスドルフ空間 X, Y に対し，$C(X) \cong C(Y)$ が成り立つのは X と Y が同相である場合のみである．Brin の定理の第 1 段の $\bar{A}$ を用いての別証明もこの種の定理のひとつと解釈できる．その意味で，上述の例とともに関数解析的色彩の強いものである．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計0件

〔学会発表〕　計0件

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関