

令和 6 年 5 月 12 日現在

機関番号：32689

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2021～2023

課題番号：21K03259

研究課題名（和文）擬アノソフ写像の不変量

研究課題名（英文）Invariants of pseudo-Anosov homeomorphisms

研究代表者

小島 定吉 (Kojima, Sadayoshi)

早稲田大学・理工学術院・その他（招聘研究員）

研究者番号：90117705

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：本研究は、2次元および3次元トポロジーの相互作用の解明を目指し、とくに曲面の擬アノソフ自己位相同型の不変量とその写像トーラスの幾何的不変量に如何に関係するかの探索を出発点とした。しかし対象は不変量に絞らず、2次元と3次元の結びつきについて広く研究を進めた。研究期間内に論文執筆に直結する成果はなく今後の課題とするが、研究対象の理解は深まり、直近でいるいろいろな方向への発展が期待される状況にある。実際、研究代表者の過去の関連研究の他の研究者による進展がいくつかあり、その理解を深めるとともに、研究集会等で独自の解釈を加えて紹介した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

2次元および3次元トポロジーが織りなす相互作用のいろいろな側面を解明することは、トポロジーおよびその関連分野における重要な課題の一つと認識されている。本研究は、とくに双曲幾何との関連に注目し課題に対し各種の試みを実施し、各種相互作用の理解を深めたという貢献があり、その学術的意義は明白である。一方、テーマに記した擬アノソフ写像は流体攪拌を産む等いくつかの応用研究があるが、現時点では大きな取り組みには至っていない。その意味で、社会的意義を見出すのはこれからの課題である。

研究成果の概要（英文）：The purpose of this research is to explore interactions between 2-dimensional and 3-dimensional topology, and in particular I focus on how invariants of pseudo-Anosov homeomorphisms are related with the geometry of their mapping tori. However, I have not restrict my interest to invariants and study possible interactions between 2 and 3 dimensions more widely. Though there were no publications for the period of research, our understanding became deeper than before and is expected to be developed to several directions in near future. In fact, there were some progresses on my past studies by other researches, and I studied them and reported them with my own understanding in some workshops.

研究分野：幾何学

キーワード：双曲幾何 曲面 タイヒミュラー空間 擬アノソフ写像類 写像トーラス 3次元多様体

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

(1) 1980年以降の2次元および3次元トポロジーの研究は、サーストン(W. Thurston)の出現以来幾何的な要素が大きく本質的に絡むようになり、興味の対象が驚くほどのスピードで広がっていった。21世紀当初のペレルマン(G. Perelman)によるサーストンの幾何化予想、そしてポアンカレ予想の解決は、流れにさらに拍車をかけた。その中心には、双曲幾何、あるいはより一般に双曲的な疎幾何があり、過去40年間には膨大な量の研究成果が現れた。このことはArXivの関連セクションに掲載される論文の数を見れば明らかである。

(2) 曲面(2次元多様体)の自己位相同型があれば、その写像トーラスを取ることで3次元多様体を得られる。2次元と3次元を結ぶ一つのパスである。サーストンは自己同型が擬アノソフ型であることと、その写像トーラスが双曲構造を持つことが同値であることを示した。したがって、2次元トポロジーと3次元トポロジーを結ぶ研究において、両者の幾何的關係を探るための土台の優れたプロトタイプを提供しており、多くの場面でいろいろな課題が挙がっていた。また、曲面の自己位相同型から、写像トーラスとは対照的にヘガード分解を通して3次元多様体が構成できる。これもまた2次元と3次元を結ぶ確固としたパスであり、同様に様々な課題が挙がっていた。

(3) 今世紀当初に当時東京工業大学の博士課程に在籍していた高澤(M. Takasawa)は学位論文で、擬アノソフ写像のエントロピーと写像トーラスの体積を比較するコンピュータ実験を行い、両者に相関があることを指摘した。以降、この研究はいろいろな方向に発展しながら今日に至っている。その中で、研究代表者とグルノーブルのマックシェーン(G. McShane)は、エントロピーと体積の比は曲面のトポロジーのみによる明示的な定数で下から抑えられることを証明し、論文が2018年にGoem & Topolに掲載された。明示的であることが多くの応用を導き、相当数の関連研究が続いている。

2. 研究の目的

(1) 本研究の大きな目的は、2次元と3次元のトポロジーにおいて、それぞれの位相的なあるいは幾何的な不変量の間を結びつけ、両者の關係の理解の推進に貢献することである。このままでは漠然としているが、出発点はマックシェーンとの共同研究とし、研究開始直近には、我々の評価の精密化、またエントロピーはタイヒミュラー空間のタイヒミュラー距離、すなわち L_1 計量に関するタイヒミュラー空間上の移動距離だが、タイヒミュラー空間にはさまざまな距離が入り、それらに関する移動距離について検討することも当初の課題として申請書に記した。ただし、研究開始当初から、研究の興味の対象はエントロピーに代表されるタイヒミュラー空間上の各種移動距離と写像トーラスの体積の比較に留めなかった。他にも、2次元と3次元を結ぶ橋はいくつもあり、不変量に限らずいろいろな観点からの關係があることは明白で、いずれも研究対象に含めていた。

(2) やや発展的だが、結び目あるいは絡み目の図式は2次元的で、それらの量子不変量は2次元図式不変量と見做せる。一方、結び目や絡み目の補空間は3次元的で、例えば双曲的な場合の体積は3次元的不変量である。それらを結びつけるカシャエフ(R. Kashaev)、村上-村上(H. Murakami・J. Murakami)による体積予想はその一つの例で、予想の定式化以来30年以上に渡り研究の蓄積が進んでいる。本研究は、申請書に明示はしなかったが体積予想も研究対象としていた。

(3) 双曲デーン手術はトーラスカスプのアフィン構造の変形と結び目の補空間の双曲構造の変形が結びつくという意味で、2次元と3次元を結びつける。さらに射影構造をもつリーマン面の変形は、無限体積の3次元双曲多様体の変形とも結びつく。この結びつきの解明も本研究の対象としていた。

3. 研究の方法

(1) 本研究は2次元と3次元トポロジーの結びつきを対象としたので、幅広く多くの関連研究者との研究交流を通じた情報収集が必要であった。そのため、個別研究者との議論、関連セミナーや研究集会への参加、あるいはそれらを開催するなどを頻繁に実施し、得られた知見を基に研究を推進することとした。とくに最初の2年間は研究代表者が早稲田大学に在籍しており、これらのイベントをほぼ定期的に行なった。

(2) 当初から2年間研究分担いただいた山下(Y. Yamashita)および2022年度に研究分担いただいた逆井(T. Sakasai)とは、とくにコンピュータ上での不変量の試行計算可能性を議論し、実際実施し多くのデータを提供いただいた。

(3) 今年度は研究期間の最終年度であり、一つの総括として、近隣研究者を集めた「Characters and Moduli of Surfaces」と題する3日間の国際研究集会を、2023年7月に京都大学数理解析研究所において開催した。80名を超える参加者が集まり、2次元と3次元トポロジーの相互作用の興味深さを演出できたと考えている。

4. 研究成果

具体的な成果を期間内にたとえば論文としてまとめることはなかったが、課題に対する理解は進み、成果を得るのは今後の課題と考えている。他方、論文ではないが、研究代表者の過去の研究と本研究との関連で、理解の進展を研究集会等で発表する機会があった。それらを以下に記す。

(1) 1979年に研究代表者と山崎(Y. Yamasaki)は絡み数がゼロの2成分絡み目に対する有理関数不変量を定義した。その時点では不変量の変数、係数は古典的な意味しかもたなかったが、一昨年、デグチャレフ(A. Degtyarev)、フローレンス(V. Florence)、レクオナ(A. Lecuona)により、成分数や絡み数によらない表現論による解釈が与えられ、多変数版に拡張された。これはそもそも補空間を使った3次元的定義を、図式代数を使った2次元的定義に置き換えることにより新展開を得たものである。一昨年オンラインで開催された研究集会「代数的位相幾何学の軌跡と展望」で、この結果を独自の解釈を含め紹介した。

(2) やはり一昨年、ベルトロッチィ(F. Bertolotti)とフリゲリオ(R. Frigerio)により一般の多様体に対する写像類の充填体積が写像類群上の長さ関数として定義され、それが写像トーラスの単体体積に一致することが示された。この仕事には、研究代表者による2012年の擬アノソフとは限らない曲面の写像類の写像トーラスの単体体積に関する研究の定式化が貢献した。一方、正井(H. Masai)は擬アノソフ写像類に対しては移動距離が写像トーラスの体積と一致するタイヒミュラー空間上の距離を定義したが、両者の関係について検討し、昨年開催されたハイブリッド研究集会「リーマン面・不連続群」で検討結果を発表した。

(3) 研究代表者は2003年に水嶋(S. Mizushima)とタン(S. P. Tan)と共に射影構造をもつリーマン面上のサークルパッキングについて研究を進め、そのモジュライからタイヒミュラー空間への一意化写像が位相同型であることを予想した。この仕事は最近になって進展があり、とくに昨年、ボンサンテ(F. Bonsante)とウォルフ(M. Wolf)によりモジュライが滑らかな多様体であることが証明された。昨年開催された小研究集会「Topics on Surfaces and Knots」で、彼らの結果を独自の理解を込めて紹介した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計0件

〔学会発表〕 計4件（うち招待講演 4件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 小島 定吉
2. 発表標題 写像トーラスの単体体積について
3. 学会等名 リーマン面・不連続群論（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 小島 定吉
2. 発表標題 コンピュータ支援数学の研究倫理
3. 学会等名 東京大学大学院数理科学研究科談話会（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 小島 定吉
2. 発表標題 Degtyarev-Florens-Lecunoaによる 関数の一般化
3. 学会等名 代数的位相幾何学の軌跡と展望（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 小島 定吉
2. 発表標題 Bonsante と Wolf によるサークルパッキングの射影剛性
3. 学会等名 Topics on Surfaces and Konts（招待講演）
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計2件

1. 著者名 小島 定吉	4. 発行年 2022年
2. 出版社 共立出版	5. 総ページ数 158
3. 書名 ポアンカレ予想 高次元から低次元へ	

1. 著者名 小島 定吉	4. 発行年 2021年
2. 出版社 共立出版	5. 総ページ数 192
3. 書名 多角形の現代幾何学 [新装版]	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	山下 靖 (Yamashita Yasushi) (70239987)	奈良女子大学・自然科学系・教授 (14602)	2021年度, 2022年度分担
研究分担者	逆井 卓也 (Sakasai Takuya) (60451902)	東京大学・大学院数理科学研究科・准教授 (12601)	2022年度分担

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 Characters and Moduli of Surfaces	開催年 2023年 ~ 2023年
---	----------------------

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------