

令和 6 年 6 月 14 日現在

機関番号：13101

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2021～2023

課題番号：21K03267

研究課題名（和文）粒子系のスペクトルギャップの詳細評価

研究課題名（英文）Sharp bound of the spectral gap for particle systems

研究代表者

永幡 幸生（Nagahata, Yukio）

新潟大学・自然科学系・教授

研究者番号：50397725

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 1,800,000円

研究成果の概要（和文）：粒子系の典型例である zero-range process のスペクトルギャップのオーダーの詳細な評価を行った。先行研究として、摂動に強いマルチンゲール法を用いて、粒子数密度に依存しないスペクトルギャップの評価方法があったが、この方法を拡張して、粒子数密度に依存したスペクトルギャップの評価を行うことは今までできていなかった。本研究では技術的な仮定を置く必要があるが、この拡張に成功し、粒子数密度に依存したスペクトルギャップの評価を得る方法を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

確率過程論においてスペクトルギャップはその確率過程の重要な基本的特性量であり、その詳細評価はそれだけでも十分な意味を持ちますが、特に粒子系の確率過程で、時間・空間に関するスケール極限を行う場合にはスペクトルギャップの評価を必要とします。興味深いスケール極限に関する結果の中には、スペクトルギャップの評価を仮定すれば成り立つとするものもあり、今回の結果により適用範囲が増えたことになり意味のある結果となります。

研究成果の概要（英文）：We study the sharp order estimate of the spectral gap for zero-range process. As a previous research, by using Yau's martingale method, the spectral gap estimate for the zero-range process is discussed. In this research, the spectral gap does not depend on the density of particles. It is also desired that we improve this method to the density depending spectral gap estimate. However we should add some technical assumption on the jump rate for zero-range process, we improve this method.

研究分野：確率論

キーワード：spectral gap zero-range process martingale method

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

確率過程論においてスペクトルギャップは基本的な特性量であり、その評価はそれだけでも十分に価値のあるものだが、粒子系、さらには粒子径の時間 空間に関するスケール極限を考える場合にはそれ以上の価値が出てくる。

本研究で取り上げる zero-range process は気体運動を簡略化した確率モデルである。このモデルを含めて、特に興味を持って研究している対象は相互作用をする無数のランダムウォークである。有限な立方体格子の中で相互作用をする無数のランダムウォークは、適切な時間 空間のスケール変換を行うことで、様々な様相を見せる。その一つが流体力学極限と呼ばれ、zero range process においては適切な時間 空間のスケール極限を取ることで、確率的な運動から決定論的な非線形の拡散方程式を導出することができる。また別のスケール極限を取ることで、流体力学極限で出てきた拡散方程式からのずれを表す揺動として拡散過程が得られる。また弱い非対称性を持たせた過程のスケール極限を取ることで確率偏微分方程式である KPZ 方程式を得ることができる。一方でこれらのスケール極限を得られるための一つの条件としてスペクトルギャップの評価が挙げられている。

必要な評価をもう少し詳しく説明すると、相互作用しない無数のランダムウォークの場合にはパラメータである立方体の1辺の長さの逆数の2乗のオーダーになることが知られている。これに対して相互作用を十分強くした zero-range process を考えると、パラメータとして、立方体の1辺の長さ、粒子数密度の関数になることが予想され、スケール極限が得られる十分条件としては、この粒子数密度の関数の可積分性として与えられる。この可積分性は予想としてはほぼすべてのモデルにおいて正しいと信じられているが、実際にはスペクトルギャップを詳細に評価してその具体系から可積分であるかを確認するしかない状況である。また実際にスペクトルギャップの評価が行われているモデルは非常に限られたものである。

2. 研究の目的

本研究の目的は zero-range process 全般にわたりスペクトルギャップを評価すること、特に粒子数密度関数の良い評価を与えることが目的になり、その具体的な目的は方法論と重なるが、大きく分けて次の2つとなる。

(1) 先行研究である Landim Sethuraman Varadhan の方法を拡張して zero-range process 全般でスペクトルギャップの評価を可能にする。

(2) 計算機援用により、作用素(行列)の反復計算を行うことによる第2固有関数(ベクトル)

および第2固有値の近似法の構築およびその粒子系への応用

3. 研究の方法

目的でも述べたが、大きく分けて2つの方法を用いる。

(1) 先行研究である Landim Sethuraman Varadhan の方法を拡張して zero-range process 全般でスペクトルギャップの評価を可能にする。

(2) 計算機援用により、作用素(行列)の反復計算を行うことによる第2固有関数(ベクトル)

および第2固有値の近似法の構築およびその粒子系への応用

4. 研究成果

(1) 目的、および方法の(1)に関連する研究成果として Landim Sethurman Varadhan の結果を部分的に拡張することに成功した。

(2) 目的、および方法の(2)に関連する研究成果として、技術的な問題で、粒子系では適用できなかったが、技術的には対応可能で、非自明な問題設定として非対称ランダムウォークのスペクトルギャップの評価に適用することが可能で、予想以上に詳細な評価が可能であること、またスペクトルギャップの評価自体が非自明であるような例を発見することができた。

以下(1)(2)に関して詳しく説明する。

(1) zero-range process のスペクトルギャップの詳細評価は、既存の研究結果として大きく2つの方法論がある。一つ目は Landim Sethurman Varadahan による、マルチンゲール法を用いたものである。二つ目は筆者も行ったカップリング法を用いたものである。後者を用いると、特定の飛躍率においては、非常に強い結果を得られるが、一方で制約条件も強く、得られた結果の飛躍率の条件に小さな摂動を加えただけで成立しないものでもあった。前者のマルチンゲール法は摂動に対しては強い性質を持っているが、一方で現れるスペクトルギャップが粒子数密

度に依存しないという強い制約が必要であった。このため両者を合わせたような、スペクトルギャップは粒子数密度に依存し、かつ摂動にも対応可能な方法の導出が求められていた。マルチンゲール法を用いてスペクトルギャップを評価するときに粒子数密度に依存しないという強い制約条件が付いていたのは技術的な理由で、不等式の評価としてヘルダーの不等式を用いる必要があり、その成立条件として必要であった。本研究ではこのヘルダーの不等式の問題を解決する方法を与えることが主目的であり、条件が付くものの部分的に解決することに成功した。その大きな理由が、鍵となる考え方として、「スペクトルギャップはサイズと粒子数に依存する（サイズと粒子数の関数になる）が、サイズと粒子数密度に依存して（サイズと粒子数密度の関数になり）粒子数密度に関する部分（関数）はモデルの特性から与えられるため、サイズに関する部分（関数）だけを評価すればよい」を得られたことにある。この考え方を適用するためにいくつかの技術的な評価方法が必要であり、そのための条件が付いたものの粒子数密度に依存したスペクトルギャップをマルチンゲール法で評価する方法を与えた。なお結果に関しては現在投稿準備中である。

(2) 本研究ではこの主目的を補助する目的で、計算機援用によるスペクトルギャップの評価を行った。計算機においては人間では到底できない、反復計算を行うことが容易である。スペクトルギャップを含む固有値の反復計算に関しては（スペクトルギャップの話ではあまり現れないが）多くの結果が知られている。非常に単純に（ある程度良い初期値として）一つのベクトルを与えて、それと行列の積との反復計算を行えば、特定の固有値に対応した固有ベクトルへと収束する。この事実と、zero-range process のスペクトルギャップに対応した固有ベクトル（固有関数）の近似（予想）が得られているため、計算機による近似、またこの計算に基づく理論的な結果が得られると予想して評価を行う予定であった。一方でこの考え方に基づく反復計算を行うためには、実質的に対応する推移確率行列、すなわち状態空間のサイズの行列を準備して反復計算を行う必要がある。もちろんこの行列の多くの成分は 0（疎行列）であり、必要な計算機のリソースは抑えられることが予想できるものの、zero-range process の状態空間は近似として粒子数のサイズ乗と大きすぎるものである。これを他の粒子系である排他過程にするにしても 2 のサイズ乗といくぶん小さくなったものの十分に大きすぎるものであり、（計算機的な）技術的問題により粒子系で適用するのは困難に思える問題であった。一方でこの考え方自体はそれほど外れた考え方とは思えなかったため、自明ではなく、状態空間があまり大きくない境界条件付き非対称ランダムウォークのスペクトルギャップの評価に関して適用した。その結果予想していた以上に詳細な結果が得られ、0 でない定数に収束することが予想されていたスペクトルギャップを得られる場合に定数だけでなく、その定数に収束するオーダーも得られているように見える。また収束先が自明でない例を発見することもできた。

本研究費を用いて「The 21st Symposium Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems」を共催した。この研究集会は粒子系やそのスケール極限を含む研究分野の研究集会であり、講演やフリーディスカッションを中心に、研究課題に対して多くの知見を得られた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計0件

〔学会発表〕 計0件

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 The 21st Symposium Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems	開催年 2023年～2023年
---	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------