

令和 6 年 5 月 11 日現在

機関番号：13301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2021～2023

課題番号：21K03268

研究課題名(和文) Bergman 空間上の作用素解析

研究課題名(英文) Operator analysis on Bergman space

研究代表者

米田 力生 (Rikio, Yoneda)

金沢大学・学校教育系・教授

研究者番号：70342475

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,900,000円

研究成果の概要(和文)：ベルグマン空間論は、アメリカ、韓国、中国の研究者を中心に進められているが、それらの研究の大半は既に知られた結果(ハーディー空間上の理論)を一般化するというものである。そうした中、申請者が現在進めている、これから進めていく研究は、過去に於けるそういった流れにとられることのない斬新なものである。具体的には、ハーディー空間及びベルグマン空間上の理論の直接的関係を導き出し、荷重付きディリクレ空間(最終的には一般的な解析関数空間であるFunctional Hilbert space)上の全く新しい特徴付けを導き出すというものであり、この研究が関連分野における今後の礎になるものになると確信している。

研究成果の学術的意義や社会的意義

今回の研究成果の学術的意義としては、解析空間上の作用素に関する研究の基礎として非常に重要な結果を得られたことにある。得られた結果はどれも他分野に応用が期待できる基礎論として重要な成果でありすでに幾つか引用論文として取りあげられていることからわかるが、解析学の多くの分野に今後引用されると考えている。

研究成果の概要(英文)：Bergman spatial theory is being advanced mainly by researchers in the United States, South Korea, and China, but most of their research is generalizing already known results (Hardy spatial theory). Against this backdrop, the applicant's current and future research is innovative and unbound by past trends. Specifically, we will derive a direct relationship between theories on Hardy space and Bergmann space, and derive a completely new characterization of weighted Dirichlet space (ultimately Functional Hilbert space, which is a general analytic function space). I am confident that this research will become a foundation for future work in related fields.

研究分野：函数論、作用素論

キーワード：composition operator Toeplitz operator Bergman空間 ディリクレ空間 ベリジン変換 合成関数

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

解析関数空間であるハーディー空間、ディリクレ空間、ベルグマン空間(ハーディー空間を拡張した空間で共に荷重付きディリクレ空間である)とそれらの上の作用素に関する研究は、非常に多くの研究者によって注目され現在盛んに行われている。特に中国や韓国、インド、フィンランド、アメリカでは、かなり活発に研究されている研究分野であり、関連する学術論文も数多く書かれている。ベルグマン空間論は、1970年に S.Bergman によって古典的なハーディー空間論を応用するというを目的に研究され始めた分野であり、最近では工学にも広く応用されている。ベルグマン空間は、複素平面上の開単位円板上の p 乗可積分である正則関数からなるバナッハ空間であり、単位円上の p 乗可積分である正則関数からなるバナッハ空間として定義されるハーディー空間とは深く結びついている。 $p=2$ の場合、両空間とも荷重付きディリクレ空間を満たす複素平面上の開単位円板上 2 乗可積分である正則関数からなるバナッハ空間とみなすことが出来るが、それぞれの空間上において利用できる証明手法や証明テクニックは全く異なっている。そのため、単純にハーディー空間上の理論をベルグマン空間上の理論に応用し一般化しようとしても簡単には出来ないのが現状であり、未解決問題が数多く残されている。現在、ベルグマン空間論に関する研究は、アメリカ、インド、韓国、中国の研究者を中心に進められているが、それらの研究の大半は既に知られた結果(ハーディー空間上の理論)を一般化するといったものである。そうした中、現在進めている、これから進めていく研究は、過去に於けるそういった流れにとらわれることのない斬新なものである。具体的には、ハーディー空間及びベルグマン空間上の理論の直接的関係(共通の質、ベリジン変換の解析などを進め、それを応用する方法)を導き出し、(両方の空間を一般化した)荷重付きディリクレ空間(最終的には一般的な解析関数空間である Functional Hilbert space)上の全く新しい特徴付けを導き出すというものである。

2. 研究の目的

ハーディー空間上のテープリッツ・合成・掛け算作用素の可逆性、それらのスペクトル及びフレドホルム作用素の特徴付けに関して、大部分は研究が進み、工学にも広く応用されている。しかし拡張された空間であるベルグマン空間(荷重付きディリクレ空間)上では、まだ殆ど研究が進んでいない。特に、「テープリッツ作用素の積がゼロになる際、そのシンボルのどちらか一方がいつ 0 になるか」「ベリジン変換の下限が正の時、テープリッツ作用素は可逆になるか」「ベルグマン空間上で作用素がいつ可逆作用素になるのか」「ベルグマン空間上で作用素はいつフレドホルム作用素になるのか」に関する特徴付けは、未解決問題として残されている。そこで、この未解決問題を研究目標の中心に据え、「ベルグマン空間上で可逆になるテープリッツ・合成・掛け算作用素の解析」及び「ベルグマン空間上のテープリッツ・合成・掛け算作用素のフレドホルム作用素の解析・スペクトルの解析」「ヒルベルト空間上のテープリッツ・合成・掛け算作用素の可逆性・フレドホルム指数・スペクトルの解析」を目指すことである。その第一歩として、ベルグマン空間上で定義される作用素の有界性・コンパクト性・シャッテンクラスに属す

ることが、対応した作用素のベリジン変換と深く関わっていることに着目し、ベルグマン空間上の作用素のベリジン変換の解析を行う。ここで一般的なヒルベルト空間 H 上の作用素 T のベリジン変換とは、 H 上の reproducing kernel k_z に対し、 $T(z) = \langle T k_z, k_z \rangle$ と定義されるものである。具体的な研究の進め方としては、先ずベルグマン空間上の作用素のベリジン変換の性質を解析することを最重要課題として掲げ、その研究に着手することにした。一方、最近の研究でハーディー空間上の合成作用素が閉値域を持つことと関係付けられる空間が BMOA であり、ベルグマン空間上の閉値域合成作用素と関係付けられるのがブロック空間であることを解明し、閉値域を持つ合成作用素の完全な特徴付けに成功し、そこで得られた結果は、学術論文の中で述べられている。また最近の研究で、より小さいブロックタイプ空間上の合成作用素と荷重付きディリクレ空間上の合成作用素が同時に閉値域を持つ条件を導き出すことに成功し、そこで得られた結果は、過去の学術論文の中で述べられている。ここで問題になってくるのがベルグマン空間上の作用素の有界性、コンパクト性等の結果の大半はベリジン変換を利用して特長付けられているにも関わらず、「閉値域を持つこと」と「ベリジン変換」の関係が全く知られていないということにある。本研究の目的である作用素の可逆性は作用素が閉値域を持つことと深く関係しているわけであるが、これも結果的にベリジン変換の関係は全く知られておらず、「可逆性」と「ベリジン変換」の関係を知ることが重要な課題となる。ベルグマン空間上の作用素のベリジン変換は、古典的なハーディー空間の関数の harmonic extension となっていることが知られているわけであるが、1973 年に R.G.Douglas によって、ハーディー空間の関数の harmonic extension の絶対値が正であるときにテープリッツ作用素の可逆性は保証されるかという問題が提起され、この問題は、1983 年に T.H.Wolff, 1986 年 E.K.Nikolskii によって条件付きで部分的に結果が導かれているが、一般的には成立しない例も彼らの論文に示されている。そこで、本研究ではベルグマン空間上の作用素のベリジン変換の持つ性質そのものを解析することにより、この未解決問題に新たな結果を導き出すことも目指した。また同時進行で、ベルグマン空間上におけるテープリッツ・掛け算・合成作用素が「いつフレドホルム作用素になるのか」「ベルグマン空間上におけるテープリッツ・掛け算・合成作用素のスペクトル」に関する研究も進めていくことにした。幾何学的な対象に関連して現れる作用素の場合に、このフレドホルム指数は位相的な量と関係することが多い。そのため、フレドホルム理論は幾何学と関数解析学との接着剤的な役割を果たしている。ベルグマン空間上の特殊なシンボルを持つテープリッツ作用素の積がいつフレドホルム作用素になるのかに関する研究として代表的な結果が 1998 年に Sheldon Axler と Dechao Zheng によって逆カールソン不等式を利用して特徴付けられた。しかし、「一般のシンボルを持つテープリッツ作用素がいつ閉値域を持つのか、いつ可逆になるのか」に関する研究は、現在殆ど知られておらず、未解決問題として残されていた。この問題解決のためにもベリジン変換を利用できないかということは自然な考察であるが、そこにはかなりのギャップがあり、そのような結果は未だ知られていない。そこで、先ず掛け算作用素がテープリッツ作用素の特殊な場合であることに着目し、ベリジン変換を利用した掛け算作用素の解析を行い、その結果を一般化するという方法で可逆なテープリッツ作用素の解析を進めていった。また、可逆作用素及びフレドホルム作用素となる合成作用素に関する研究も同様の手法で解析を進めていった。更に、得られた理論をヒルベルト空間上及び多変数上の理論に応用する研究にも着手した。

3. 研究の方法

古典的なハーディー空間論を一般化したベルグマン空間論の研究を行ってきたが、7年前に赴任してきた金沢大学には現在進めている研究を遂行するために必要な文献が殆どない状況であり、研究を円滑に進めていく上で、大きな障害となっていた。そのため、研究を行うためには専門領域関連図書及び雑誌が多数必要であった。また、研究を更に進めていくためには、そのための研究打ち合わせを頻繁に行うことが有効であり効果的でもあるため、円滑に研究を行うためには、オンラインでの最新通信設備がかなり必要になった。更に、研究の裏付けとなる具体的な例を精確に計算するための数学計算ソフトも多数必要になった。

4. 研究成果

今回の研究で得られた成果は既に幾つかの論文誌に投稿済みである。中には掲載されたものもあり、印刷中のものもある。また今回の期間で得られた研究成果の発表を複数回行っており、今後の研究課題を見つけることにも繋がった。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件／うち国際共著 0件／うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Rikio Yoneda	4. 巻 516
2. 論文標題 Invertibility of Toeplitz operators on the Bergman spaces with harmonic symbols	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Analysis and Application	6. 最初と最後の頁 1 - 16
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Rikio Yoneda	4. 巻 139
2. 論文標題 Pointwise multipliers from a weighted Bergman space $L^p_a(\omega_1)$ to a weighted Bergman space $L^p_a(\omega_2)$	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Far East Journal of Math.Sciences	6. 最初と最後の頁 23 - 37
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Rikio Yoneda	4. 巻 17
2. 論文標題 Boundedness from below of composition operators between L^p_a and L^q_a , between L^p_a and the Hardy space H^2 , between L^p_a and Besov space	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Inequalities	6. 最初と最後の頁 315 - 323
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計4件（うち招待講演 0件／うち国際学会 0件）

1. 発表者名 米田 力生
2. 発表標題 ハーディー空間上とベルグマン空間上の重み付き合成作用素
3. 学会等名 日本数学会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 米田 力生
2. 発表標題 調和関数をシンボルを持つテプリッツ作用素 (Toeplitz operators on the Bergman spaces with harmonic symbols)
3. 学会等名 ポテンシャル論セミナー
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 米田 力生
2. 発表標題 調和なシンボルを持つベルグマン空間上の可逆なテプリッツ作用素 Invertibility of Toeplitz operators on the Bergman spaces with harmonic symbols.
3. 学会等名 日本数学会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 米田 力生
2. 発表標題 Weighted composition operators between H^p and L^q_a
3. 学会等名 日本数学会
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------