

令和 6 年 6 月 28 日現在

機関番号：12101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2021～2023

課題番号：21K03285

研究課題名(和文) Hardy空間とBergman空間の間の荷重合成作用素の研究

研究課題名(英文) Study on weighted composition operators between Hardy and Bergman spaces

研究代表者

細川 卓也 (Hosokawa, Takuya)

茨城大学・理工学研究科(工学野)・准教授

研究者番号：90553579

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,400,000円

研究成果の概要(和文)：(1)古典的なNevanlinna関数に荷重を施した一般化Nevanlinna関数を考え、その境界挙動を精査する必要性が生じていた。このために、Riemann面やポテンシャル理論、値分布論などの周辺分野を含めた情報収集を行った。
(2)樹状グラフ上の一般の荷重付きBanach空間やLipschitz空間を定義し、それらの持つ最大増大度や「多項式稠密性」に相当する性質などの基本性質を示した。さらに、それらの関数空間の間に作用する掛け算作用素の有界性やコンパクト性を特徴付けた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究で得られた成果は、無限次元の自由度を持つ樹状グラフ上の関数空間の上で定義される作用素と呼ばれる対象の性質を、対応するシンボル関数の情報で特徴付けるものである。本研究の研究対象は、過去に他の研究者によって研究されてこなかった独自性の強いものである。特に樹状グラフ上の一般荷重付き関数空間は定義から始めて、基本性質を一通り調べることができた。このことから、本研究は独自性が強く学術的意義のある研究結果になっている。

研究成果の概要(英文)：(1)We considered the generalized Nevanlinna functions. To analyze their boundary behaviors, we studied on the theory of Riemann surfaces, the potential theory, and Nevanlinna Theory.

(2)We defined the Banach-type spaces and the Lipschitz spaces with general weights, and showed their maximal growth and other several fundamental properties. Moreover, we consider the multiplication operators between those spaces, and characterized their boundedness and compactness.

研究分野：数学

キーワード：樹状グラフ 掛け算作用素 荷重付き関数空間

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

(1) 本研究の学術的背景と研究課題の核心をなす学術的「問い」

(1-1) 学術的背景

解析関数の間に定義され、解析性を保つ演算で基本的かつ普遍的なものに乗法(multiplication)と合成(composition)がある。また、(解析的とは限らない場合も含め)関数環の間の準同形写像が荷重合成作用素 $uC_{\varphi}: f(x) \rightarrow u(x)f(\varphi(x))$ の形で与えられることから、これらの演算が関数環の構造に深く関わっていることも判る。

($z=z$ の場合、 uC_z は掛け算作用素 M_u であり、古くから様々な性質が調べられている。ここでは複素平面の単位円板を D として、 D 上の Hardy-Hilbert 空間 H^2 や Bergman-Hilbert 空間 A^2 (> -1) 上の基本的な結果として、以下を挙げておく:

$$\begin{aligned} M_u \text{ が有界である} & \quad u \text{ が } D \text{ 上で有界である} \\ M_u \text{ がコンパクトである} & \quad u = 0 \text{ on } D \end{aligned}$$

一方で、 $u=1$ の場合、 $1C=C$ は合成作用素と呼ばれる。合成作用素の研究が盛んになった契機としては、1987年の J. H. Shapiro による H^2 上の合成作用素のコンパクト性の特徴付けがあり、ここでは C のシンボルである正則自己写像の Nevanlinna 関数の境界挙動によって合成作用素の本質ノルムが評価されている。その後、様々な解析関数空間上で合成作用素の研究が進み、それぞれの空間に対応する函数論的な量を用いることで、合成作用素の性質が記述されている。例えば、Bergman 空間上では角微分が、Bloch 空間上では双曲微分が、合成作用素の諸性質を特徴付ける。このような函数論と関数解析学のインターフェイスとしての視点は解析関数空間上の作用素の研究では本質的であり、「解析関数空間上の種々の作用素の関数解析的な性質を、函数論的な性質で特徴付けること」は、'Complex Analysis' の主要な問題設定の一つである。

(1-2) 核心をなす学術的「問い」

上述のように、Hardy 空間 H^2 上や Bergman 空間 A^2 上において、 C と M_u のそれぞれの性質は比較的良好に調べられているが、 uC については最も基本的な性質の有界性とコンパクト性ですら未だに特徴付けが得られていない。従って、本研究課題の核心をなす学術的「問い」は次のようになる:

「Hardy 空間上, Bergman 空間上の uC の有界性とコンパクト性の特徴付けは何か？」

この問題は基本的ではあるが、一度、有界性とコンパクト性の特徴付けが得られると、そこに用いられた評価式が基になり、他の様々な性質を調べる突破口となり、荷重合成作用素の研究が飛躍的に進むことが期待される。

2. 研究の目的

本研究の核心をなす問い「Hardy 空間上, Bergman 空間上の uC の有界性とコンパクト性の特徴付け」は、基本的ではあるが当該分野において重要な未解決問題であり、解決した場合の当該分野に与えるインパクトと貢献は大きい。より具体的な目的を、周辺状況も併せて以下に述べる。

(2-1) 本研究の目的「一般化した Nevanlinna 関数とその性質の解明」について

H^2 上や A^2 上の場合、荷重のない合成作用素については、Littlewood の subordination theorem により、任意の正則自己写像 φ に対して C は有界である。一方で、コンパクト性については、 A^2 上の場合には φ の角微分の境界挙動で判定される。具体的には、

MacCluer, Shapiro, Angular derivatives and compact composition operators on the Hardy and Bergman spaces, Canadian J. Math. 38(1986), 878-906.

において、

$$C_{\varphi} \text{ is compact on } A^2 \quad \limsup_{|z| \rightarrow 1} (1 - |z|^2) / (1 - |\varphi(z)|^2) = 0$$

が示されている。

しかし、これを荷重付き合成作用素の場合に拡張しようとしても、 φ の重複度が反映されにくい。ため、別の方法を考える必要がある。

本研究の目的の一つは、この拡張である。

3. 研究の方法

Φ の重複度を反映させるための方法として、本研究で考えるのは Nevanlinna 関数を用いる方法である。実際、Smith は

Smith, Composition operators between Bergman and Hardy spaces, Trans. Amer. Math.

Soc., 348(1996), 2331-2348

の論文で、荷重のない場合について、Nevanlinna 関数を用いた解析を行っている。本研究でも Nevanlinna 関数を用いた荷重合成作用素の特徴付けを考えていく。

4 . 研究成果

(1) 古典的な Nevanlinna 関数に荷重を施した一般化 Nevanlinna 関数を考え、その境界挙動を精査する必要性が生じていた。このために、Riemann 面やポテンシャル理論、値分布論などの周辺分野を含めた情報収集を行った。

(2) 樹状グラフ上の一般の荷重付き Banach 空間や Lipschitz 空間を定義し、それらの持つ最大増大度や「多項式稠密性」に相当する性質などの基本性質を示した。さらに、それらの関数空間の間に作用する掛け算作用素の有界性やコンパクト性を特徴付けた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Toshikazu Abe, Takuya Hosokawa	4. 巻 32
2. 論文標題 Integral-type operators between the weighted Lipschitz spaces on a tree	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Nihonkai Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 31-40
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計3件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 細川卓也
2. 発表標題 Some operators on power growth spaces on a tree
3. 学会等名 2021年度関数環研究集会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 細川卓也
2. 発表標題 Weighted composition operators from the Lipschitz space to the space of bounded functions on a tree
3. 学会等名 日本数学会2022年度年会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 細川卓也
2. 発表標題 Some operators on the function spaces associated with the power weights on a tree
3. 学会等名 2023年度関数環研究集会
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分担者	瀬戸 道生 (Seto Michio) (30398953)	防衛大学校(総合教育学群、人文社会科学群、応用科学群、 電気情報学群及びシステム工学群)・総合教育学群・教授 (82723)	
研究 分担者	阿部 敏一 (Abe Toshikazu) (40749157)	茨城大学・理工学研究科(工学野)・講師 (12101)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------