

令和 6 年 5 月 31 日現在

機関番号：13701

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2021～2023

課題番号：21K03307

研究課題名(和文) 準線形常微分方程式の漸近解析とその偏微分方程式への応用

研究課題名(英文) Asymptotic analysis of quasilinear ordinary differential equations and its application to partial differential equations

研究代表者

宇佐美 広介 (Usami, Hiroyuki)

岐阜大学・工学部・教授

研究者番号：90192509

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,000,000円

研究成果の概要(和文)：主として準線形常微分方程式の漸近論について研究を行った。より具体的には次である：1. 定数係数半線形常微分方程式に摂動項を加えた方程式の解の漸近形の解明；2. 臨界的な係数関数を持つ優同次型準線形常微分方程式の正值解の漸近形の解明；3. 高階準線形常微分方程式の特異解の存在・非存在性の解明；4. 高階準線形常微分方程式のクネーザー解の存在・非存在性の解明。

研究成果の学術的意義や社会的意義

1. 主テーマである半線形方程式は線形方程式の一般化にあたる。研究手法等も線形方程式に対するその一般化にあたるであろう。数学理論がどのように普遍化・一般化されていくのかをこの研究を通じて俯瞰することができるであろう。

2. 自然現象・社会現象を記述する数理モデルは、第一段階としては「線形近似」という見方で定式化されることが多い。しかし、より詳細にみると、本質的に非線形性になっているということもある。この研究ではそのような現象を数学的に解析する手法をいくつか提案している。

研究成果の概要(英文)：Mainly, asymptotic theory of solutions of quasilinear ordinary differential equations were investigated. More precisely, the following themes have been studied: 1. To find the asymptotic forms of perturbed half-linear ordinary differential equations with constant coefficients; 2. To find the asymptotic forms of positive solutions of super-homogeneous, quasilinear ordinary differential equations with critical coefficients; 3. To establish necessary and/or sufficient conditions for higher order quasilinear ordinary differential equations to have singular solutions; 4. To establish necessary and/or sufficient conditions for higher order quasilinear ordinary differential equations to have Kneser solutions.

研究分野：微分方程式論

キーワード：漸近挙動 正值解 半線形常微分方程式 準線形常微分方程式

1. 研究開始当初の背景

(1) 1980年代に“球対称性をもつある種の楕円型偏微分方程式の正值解もやはり球対称性をもつ”ということが認識されてから常微分方程式の研究が楕円型偏微分方程式の研究にとっても重要であると認識されてきた。特に準線形楕円型偏微分方程式の解析には役立つと思われた。しかし、準線形作用素は線形性を欠くため、既存の解析法～それらは線形性に大きく依存～は十分には効かない。よってその精密な解析はまだ不十分と思われた。

(2) 半分線形常微分方程式は微分項の冪指数と非線形項の冪指数が一致する常微分方程式であり、一致したその指数が1になれば線形である。よって線形方程式の一般化にあたるのだが、解の漸近的性質に関しては、振動性以外はほとんど研究がなされていなかった。やはりその解析には全く新しい手法が必要であった。

(3) 経済学・OR・社会科学等に現れるランチェスター型モデルに関するシミュレーションの研究は盛んであったが、理論に基づいた解析はほぼ皆無であった。理論数学の面からこの問題を考察する必要性を感じた。

(4) 高階準線形常微分方程式の解の漸近解析では多くのテーマが手付かずであった。特に、コンパクトな台を持つ特異解やクネーザー解、爆発解についての研究は皆無であった。

2. 研究の目的

(1) 退化ラプラス型偏微分方程式に関連した準線形常微分方程式の解の漸近形の解明：球対称な係数関数を持つ退化ラプラス型偏微分方程式の球対称解はある準線形常微分方程式を満たす。そのような常微分方程式の正值解の時刻 t_+ での漸近形を求めることを目指した。

(2) 半分線形常微分方程式の解の漸近形の解明：定数係数の2階半分線形方程式の係数部分に小さな摂動項を加えた方程式を考えよう。この方程式の正值解及び振動解の時刻 t_+ での漸近形を求めることを目指した。

(3) ランチェスター型モデルの解の漸近挙動の解明：このモデルは基本的には減衰正值解しか持たない連立系である。時刻 t_+ での解の性質を調べたい。特に、解が0に減衰するときの漸近形を求めることを目指した。

(4) 上記課題の応用としての楕円型偏微分方程式の解の漸近挙動の解明：外部領域上で定義される準線形楕円型方程式の解における漸近的性質を知りたい。特に、解の増大度評価・減衰度評価や、リューブコ型定理の確立を目指した。

(5) 楕円型方程式の比較原理の導出：準線形楕円型方程式とそれに付随する準線形常微分方程式の解同士の間になり立つ比較原理を見出したい。それらを用いれば上記の(1),(2)の結果を(4)に応用可能であると思われる。

(6) 高階準線形常微分方程式の解の漸近解析：特異解やクネーザー解、爆発解の存在・非存在の条件の導出、及びそれらの解の挙動の解明を目指した。

3. 研究の方法

(1) 退化ラプラス型偏微分方程式に関連した準線形常微分方程式の解の漸近形の解明：ここで考察すべき準線形常微分方程式のなかで、係数が臨界的な場合の考察が特に重要であった。この場合、まずその近似方程式で特殊解がある程度わかるものを見出すことができた。よって、目標となる方程式の解もほぼその特殊解に近い挙動を持つと予想した。その結果、新たな手法やうまい変数変換等を介して既存の解析法の精密化・改良が有効であることが分かった。

(2) 半分線形常微分方程式の解の漸近形の解明：一般には線形性は成り立たないので他の手法を探った。それは付随する一般化リッカチ方程式を通じての解析であった。

(3) ランチェスター型モデルの解の漸近挙動の解明：このモデルはいわゆる比較原理が成り立つ系である。また、上記(1),(2)で扱う方程式は実はランチェスター型モデルの特殊な場合にもなっている。これらの事実を踏まえてこの系は解析していくことができると思われた。

(4) 楕円型偏微分方程式の解の漸近挙動の解明：上記(1),(2)で対称性を持つ楕円型方程式の解の挙動はほぼ解明できるので、比較原理を通じて非対称な一般の楕円型方程式の解における挙動も把握できると考えた。

4. 研究成果

(1) 退化ラプラス型偏微分方程式に関連した準線形常微分方程式の解の漸近形の解明：球対称な係数関数を持つ退化ラプラス型偏微分方程式の球対称解がみたす準線形常微分方程式を考察した。特に係数関数が臨界的な場合を考察し、その正值解の時刻 t_+ での漸近形を求めることができた。この結果は以下の文献にて公開予定：

[1] Hiroyuki Usami, Asymptotic forms of slowly decaying positive solutions of quasilinear ordinary differential equations with critical exponents, Tokyo J. Math. (印刷中)

(2) 半分線形常微分方程式の解の漸近形の解明：定数係数の2階半分線形方程式の係数部分に小さな摂動項を加えた方程式を考え、この方程式の正值解の時刻 t_+ での漸近形を求めるこ

とができた．これらは National Institute of Education, Cambodia, の Sokea Luey 氏との共同研究のテーマにもなっている．成果は以下の論文で公開されている．

[2] Sokea Luey and Hiroyuki Usami, Asymptotic forms of solutions of perturbed half-linear ordinary differential equations, Arch Math. (Brno), 57 (2021);

[3] Sokea Luey and Hiroyuki Usami, Application of generalized Riccati equations to analysis of asymptotic forms of solutions of perturbed half-linear ordinary differential equations, Int. J. Dyn. Sys. Differ. Equ., 11 (2021), 378-390;

[4] Manabu Naito and Hiroyuki Usami, On the existence and asymptotic behavior of solutions of half-linear ordinary differential equations, J. Differential Equations, 318 (2022), 359-383;

[5] Sokea Luey and Hiroyuki Usami, Asymptotic forms of solutions of half-linear ordinary differential equations with integrable perturbations, Hiroshima Math. J., 53 (2023), 171-189;

[6] Manabu Naito and Hiroyuki Usami, Poincare-Perron problem for half-linear ordinary differential equations, Differential and Integral equations. (印刷中)．

(3) 高階準線形常微分方程式の解の漸近解析： 有限時刻爆発解や増大度の高い解の存在・非存在性の必要/十分条件の確立，及びそのような解の挙動を解明することができた．成果は以下の論文で公開されている：

[7] Manabu Naito and Hiroyuki Usami, Singular strongly increasing solutions of higher-order quasilinear ordinary differential equations, Mem. Differ. Equ. Math. Phys., 84 (2021), 359-383;

[8] Manabu Naito and Hiroyuki Usami, Kneser solutions of higher-order quasilinear ordinary differential equations, Funkcial.Ekvac., 65 (2022), 1-33.

(4) 楕円型偏微分方程式の解の漸近挙動の解明： 非線形項に特に単調性等を仮定せずに半線形楕円型方程式の正值解の存在/非存在性を確立した．この成果は以下の論文・講演で公開されている：

[9] 宇佐美広介，「非線形項に単調性等を仮定しない常微分方程式の正值解の非存在定理について」, RIMS 共同研究 (グループ A) 精密解析による非線形問題の新展開 (2023, 3.8)

[10] Hiroyuki Usami, Existence of rapidly decaying positive solutions of quasilinear ordinary differential equations with arbitrary nonlinearities, Mem. Differ. Equ. Math. Phys., 90 (2023), 111-119.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Manabu Naito and Hiroyuki Usami	4. 巻 318
2. 論文標題 On the existence and asymptotic behavior of solutions of half-linear ordinary differential equations	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 J. Differential Equations	6. 最初と最後の頁 359--383
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Manabu Naito and Hiroyuki Usami	4. 巻 65
2. 論文標題 Kneser solutions of higher-order quasilinear ordinary differential equations	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Funkcial. Ekvac.	6. 最初と最後の頁 1--33
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Manabu Naito and Hiroyuki Usami	4. 巻 318
2. 論文標題 On the existence and asymptotic behavior of solutions of half-linear ordinary differential equations	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 J. Differential Equations	6. 最初と最後の頁 359-383
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Manabu Naito and Hiroyuki Usami	4. 巻 84
2. 論文標題 Singular strongly increasing solutions of higher-order quasilinear ordinary differential equations	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Mem. Differ. Equ. Math. Phys.	6. 最初と最後の頁 99-112
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Sokea Luey and Hiroyuki Usami	4. 巻 11
2. 論文標題 Application of generalised Riccati equations to analysis of asymptotic forms of solutions of perturbed half-linear ordinary differential equations	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Int. J. Dyn. Syst. Differ. Equ.	6. 最初と最後の頁 378-390
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Sokea Luey and Hiroyuki Usami	4. 巻 57
2. 論文標題 Asymptotic forms of solutions of perturbed half-linear ordinary differential equations	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Arch. Math. (Brno)	6. 最初と最後の頁 27-39
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計4件 (うち招待講演 0件 / うち国際学会 0件)

1. 発表者名 宇佐美 広介, 内藤 学
2. 発表標題 摂動された半分線形常微分方程式の解の存在と漸近挙動について
3. 学会等名 日本数学会 秋季総合分科会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 宇佐美 広介
2. 発表標題 非線形項に単調性等を仮定しない常微分方程式の正值解の非存在定理について
3. 学会等名 日本数学会 年会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 宇佐美 広介, ソケア ルイ
2. 発表標題 Asymptotic forms of solutions of perturbed half-linear ordinary differential equations
3. 学会等名 日本数学会 秋季総合分科会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 宇佐美 広介, 内藤 学
2. 発表標題 摂動された半分線形常微分方程式の解の存在と漸近挙動について
3. 学会等名 日本数学会 年会
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	内藤 学 (Naito Manabu)		
研究協力者	ルイ ソケア (Luey Sokea)		

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
カンボジア	National Institute of Education			