1版

様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６ 年　６ 月　７ 日現在

機関番号：１７４０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2021～2023
課題番号：２１K０３３３０
研究課題名（和文）分数階積分作用素を伴う幾何学的熱流の正則性特異性の研究

研究課題名（英文）Nonlocal regularity for a geometric heat flow with fractional integral operator

研究代表者
三沢　正史（Misawa, Masashi）

熊本大学・大学院先端科学研究部（理）・教授

研究者番号：４０２４２６７２
交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,000,000円

研究成果の概要（和文）：分数階p-Sobolev流および二重非線形放物型分数階積分方程式について以下の研究成果を得た:(1)分数階p-Sobolev流を導出する固有のスケール変換の構成.(2)任意エネルギー有限な初期値に対する初期値零境界値問題の弱解の時間大域存在.二重非線形放物型偏微分方程式について以下の結果を得た：(3)非負弱解の正値性伝播の証明とそのヘルダー正則性へ応用.(4)速い拡散型二重非線形偏微分方程式の有限時間消滅 (5)任意エネルギー有限な初期値に対する初期値零境界値問題の弱解の時間大域存在.

研究成果の学術的意義や社会的意義
二重非線形拡散方程式の新たな幾何学的変分学的応用を見出した：(1)コンパクトリーマン多様体上の山辺問題に関わる熱流,山辺流,の結果を含み,解の定義域あるいは初期値の凸性の条件を緩和した.(2)偏微分p-ソボレフ流型方程式の正則性評価は,解の族のエネルギークラスにおける弱コンパクト性を導き,集中コンパクト性の分数階p-ラプラス方程式への一般化を与える.(3)二重非線形分数階拡散方程式の弱解の大域存在を非常に一般的条件のもと証明した．この結果は,分数階p-ソボレフ流の弱解の大域存在に応用できる.(4)二重非線形分数階拡散方程式の非負弱解の正値性伝播とヘルダー評価

研究成果の概要（英文）：We had the following results for the fractional p-Sobolev flow and the doubly nonlinear fractional p-Laplace type equations: (1) Derivation of the scaling transformation intrinsic to the fractional p-Sobolev flow. (2) The global in time existence for Cauchy-Dirichlet problem. The results for the doubly nonlinear parabolic type equations are the followings: (3) The expansion of positivity for nonnegative weak solutions (4) Regularity by the expansion of positivity for the evolutionary p-Laplace type equations (5) A finite type extinction for the fast diffusive doubly nonlinear parabolic type equations (6) The global in time existence for Cauchy-Dirichlet problem.

研究分野：Partial differential Equations

キーワード：ソボレフ不等式　条件付き変分問題　変分問題に関わる熱流の方法　ソボレフ流　正則性特異性

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

1.　**研究開始当初の背景**

（１）（ソボレフ不等式に関わる変分問題と山辺問題） n **次元領域上定義された実数値関数の一階導関数の** p **乗積分**(1 < p < n), **p エネルギーをソボレフ指数** $p^* = n\,p\,/\,(n-p)$ **乗積分，体積，を定数とする制限条件のもと極小化する条件つき極値問題，**p-**ラプラス作用素に対する非線形固有値問題であり，古典的な変分問題として長く研究されてきた．ソボレフ不等式の最良定数はこの条件付き極値問題の下限値で与えられる．コンパクトリーマン多様体のスカラー曲率(接空間の 2 次元部分空間上のガウス曲率の和)を等角(共形)変形するリーマン距離の存在を問う山辺問題は，上記変分問題に関わる幾何学的変分問題として広く知られ研究されてきた．**

（２）（山辺流と幾何学的熱流）山辺問題に対する勾配流の方法は R. Hamilton **によって提案された(山辺流，**Hamilton **流と呼ぶ)．山辺流の方法はこれまでによく研究され，山辺問題の別証明を与えた** (S. T. Yau, R. M. Schoen **ら** (1980 **年代**) **の結果**; R. Ye (1994), H. Schwetlick, M. Struwe (2003) **および** S. Brendle (2010) **らの結果**)**．申請者らはこれまでに自然数階微分の** porous medium **作用素と** p-Laplace **作用素を伴う** p-**ソボレフ流の正則性評価を構築し，**p-**ソボレフ流の時間大域正則解を構成した** ((M. Misawa **らの結果**(2018, 2019), 2021))**．この結果は** p=2 **の場合の山辺流の結果を含み，解の定義域あるいは初期値の凸性の条件を除去した．**

（３）以上（１）および（２）における自然数階微分方程式関わる変分問題とその熱流の研究を踏まえ，本研究では，体積保存条件のもと分数階積分を含むエネルギーの極値問題を考え，対応する分数階積分作用素に対する非線形固有値問題を研究する．二重非線形分数階拡散方程式の正則性を追求するとともに新たな幾何学的変分学的応用を見出したい．

（４）（分数階ｐソボレフ熱流と分数階ソボレフ不等式）積分指数 p **を** 1 < p < n **とし，微分階数** s **を** 0< s< 1 **とする．**n **次元空間上** p **乗可積分な実数値関数の分数階**(s **階**)**導関数の** p **乗積分をエネルギーとよぶ．**s **階差分商の** n **次元空間上** p **乗積分をさらに差分商の方向ベクトルの大きさに関してその**(- n)**乗を重みとして** n **重積分した量である．このエネルギーの** Euler Lagrange **方程式を分数階** p-**ラプラス方程式，主要部の積分作用素を分数階** p-**ラプラス作用素という．分数階** p-**ラプラス作用素は各点で積分の主値によって分数階積分で記述される，**n **次元空間上の関数に対する非局所積分作用素である．また** p=2 **の場合には，分数階積分作用素はフーリエ変数の冪との合成積の逆フーリエ変換で書ける（これからまた分数階積分が現れる)．滑らかな境界をもつ** n **次元有界領域外部に零張した関数に対して分数階** p-**ラプラス方程式を考えることができる．これを** n **次元有界領域上の分数階** p-**ラプラス方程式に対する** Dirichlet **境界値問題という．本研究では，**n **次元領域外部に零拡張した実数値関数のソボレフ臨界指数べき乗積分，体積，を定数とする制限条件のもと関数の分数階**(s **階**)**導関数の** p **乗積分，エネルギー，を最小化する条件付き極値問題を考える．ここでソボレフ臨界指数とは** $p^* = n\,p\,/\,(n-s\,p)$ **である．分数階**(s **階**)**ソボレフ空間は，**n **次元領域上** p **乗可積分かつエネルギー有限な実数値関数の空間である．この条件付き極値問題は，その下限値が分数階**(s **階**)**ソボレフ空間におけるソボレフ不等式の最良定数を達成する，分数階**(s **階**)p-Laplace **作用素に対する非線形固有値問題である．対応する** Euler Lagrange **方程式は冪非線形項を有する分数階**(s **階**)p-**ラプラス方程式である．非線形項は体積保存条件による** Lagrange **乗数，非線形固有値と呼ぶ，を係数とするソボレフ共役指数冪非線形項**($q = p^* - 1$ **をソボレフ共役指数とよぶ**)**である．ソボレフ不等式の最良定数は，関数の定義域が全空間あるいはコンパクトリーマン多様体のときには，**Euler Lagrange **方程式の正値解により達成される．**

(未解決問題)　**非線形固有値である** Lagrange **乗数は，体積保存の制限条件のもとエネルギーによって定まる．下限値を含め，一般のエネルギーの固有値に対する固有関数の存在問題は興味ある基本的問題である．本研究では，一般のエネルギーの固有値に対する固有関数の存在を調べるために，次の時間発展問題を研究する：**

(分数階 p-ソボレフ流の大域存在と連続性および体積集中現象)　**分数階** p-**ソボレフ流の正値連続解の時間大域存在，漸近挙動，とくに，無限時間おける非線形固有値問題の解，固有関数，への収束および体積集中現象．ソボレフ不等式の最良定数を達成する正値関数の存在非存在．**

　分数階ソボレフ不等式の最良定数を定める条件付き極値問題に対する勾配流，分数階 p-**ソボレフ流，は，解のソボレフ共役指数冪の時間微分を有する時間発展分数階** p-**ラプラス方程式である．ソボレフ共役指数冪項を非線形項にもつ．分数階** p-**ラプラス作用素を除いた方程式は，時間微分項と冪非線形項とが同じ解の冪項をもつ指数型** ODE **であり，解を大域的に存在させる効果がある．一方，主要部の解の冪の時間微分を有する二重非線形放物型分数階** p-**ラプラス作用素は，時間微分項と分数階** p-**ラプラス作用素との解の冪指数の関係から，速い拡散型** porous medium **型作用素と同様に解を有限時間で消滅させる効果をもつ．これら** 2 **つの効果の拮抗に**

よって正値初期値に対する解は正値有界となり時間大域存在することが期待できる．分数階 p-ソボレフ流は，体積保存の制限条件件のもとエネルギーの最急降下曲線であるので，その時間無限大の極限関数は定常解，極値問題の解，となると予想してよい．

２．研究の目的

（１）**本研究の目的** 本研究では，分数階 p-ソボレフ流を含む二重非線形放物型分数階 p-ラプラス方程式のクラスの新たな幾何学的変分的応用を見出すとともに，二重非線形放物型分数階 p-ラプラス積分作用素に対する正値性評価，有界性評価および連続性評価の開発を目的とする．具体的には以下の問題の解決を目指す ：

① **大きい初期値に対する時間大域存在** ：体積保存(体積 ＝ 1)を満たす正値初期値に対する分数階 p-ソボレフ流の正値連続解(解が時空連続である解)の時間大域存在．初期値のエネルギーのサイズを制限しない．

② **分数階 p-ソボレフ流の局所正則性評価** ：分数階 p-ソボレフ流は体積保存を満たすので，その解は局所正値かつ局所有界になり得る．分数階 p-ソボレフ流に対して非局所 Harnack 型不等式(非局所尾つきの Harnack 不等式)を構成し，局所体積によって局所正値性，局所有界性を証明する．局所積分評価に自然に現れる遠方分数積分(非局所尾)を局所領域のサイズで制御する．

③ **体積集中現象と漸近挙動の解析** ：分数階 p-ソボレフ流の解は体積保存し，有界領域の外部では零であるので，体積集中は高々有限個の点でしか起こらない．p-ソボレフ流の漸近挙動は，体積集中する高々有限個の点と各点周りの体積集中する漸近形によって決定される．各体積集中点周りにおける漸近形は，体積およびエネルギーの測量のもと，全空間の正値定常解によって特徴つけられる．Talenti の特殊解は分数階の場合にも方程式のスケール変換不変性によって計算できる．

（２）**本研究の方針** 自然数階偏微分で記述される p-ラプラス作用素を有する二重非線形退化特異放物型方程式は p-ソボレフ流と呼ばれ申請者らによって研究されてきた．とくに p=2 の場合には，**山辺問題**と呼ばれるスカラー曲率の等角(共形)変形に関する幾何学的変分問題の勾配流，**山辺流**(Hamilton 流)，として精力的に研究され，最近では分数階山辺流の研究へ発展している．p≠2 に加えて分数階の場合には，エネルギー構造がある一方で，山辺流(Hamilton 流)とは異なり，**スカラー曲率方程式に変形する幾何学的構造は期待できない**．そこで，分数階 p-ソボレフ v 流方程式の主要部である二重非線形放物型分数階 p-ラプラス作用素に対する正則性評価を開発する必要がある．分数階作用素の”局所”正則性評価には”遠方上”の分数階積分(**非局所尾**という)が現れ，分数階作用素の(遠方の)非局所効果が反映される．p=2 の場合に楕円型分数階ラプラス方程式の弱解に対して非局所尾を伴う局所正値性および局所有界性が証明された (M. Kassmann の結果(2009, 2011))．これら正則性評価は楕円型分数階 p-ラプラス方程式に対して一般化された(A. Di Castro, T. Kuusi, G. Palatucci の結果(2014, 2016))．時間発展方程式については，主要部のみの正規形時間微分項を有する時間発展分数階 p-ラプラス方程式でさえ，期待される解の台の有限あるいは無限伝播性，解の局所正値性，局所有界性(Harnack 型評価)および解の連続性は未解決のままである．これまでに得られた退化特異放物型作用素の正則性の結果を踏まえ，分数階作用素の非局所効果およびエネルギー構造を精密に吟味しつつ速い拡散型 porous medium 作用素と時間発展分数階 p-ラプラス作用素とが混合した**二重非線形放物型分数階積分作用素の正則性評価**を構築する．

分数階 p-ソボレフ流の解は体積保存することが要求される．主要部のみを有する二重非線形放物型分数階 p-ラプラス方程式の解をある**スケーリング変換**によって変換して体積保存する分数階 p-ソボレフ流の解を構成する．分数階 p-ソボレフ流に特有のスケーリング変換を見出すことが解の構成の最も本質的な部分である．以上の方法は，p=2 の場合の分数階山辺流**に対する基本的結果の別証明**を与えるばかりでなく，定義域，初期値の凸性など解が存在するための幾何学的条件を緩和する．

３．研究の方法

上に述べた①，②と③の問題を以下の手順で研究する ：

(a) **二重非線形放物型分数階 p-ラプラス方程式に対する先験的評価:** 体積等式およびエネルギー不等式および比較原理を証明する． 体積等式に分数階ソボレフ不等式を応用して解の有限時間消滅を証明する． 二重非線形放物型分数階 p-ラプラス作用素を不変にするスケーリング変換のもと局所積分評価を実行する． 遠方分数積分(非局所尾)を局所領域のサイズを使って評価する． 局所正値性評価(弱 Harnack 不等式)によって， 解が正値である時間区間を初期値の正値

性によって見積もる．

(b) **分数階 p-ソボレフ流に対する正則性評価:** 分数階 p-ソボレフ流に対する正則性評価を証明する． とくに正規形時間微分項を有する分数階 p-ラプラス方程式の弱解の時空連続性を証明する．

(c) **分数階 p-ソボレフ流の体積保存する解を導くスケーリング変換:** 分数階 p-ソボレフ流を導くスケーリング変換を見出す． 主要部のみを有する二重非線形放物型分数階 p-ラプラス方程式の弱解を後退差分法と弱収束の方法よって構成する． 体積等式および解の正値性評価にもとづいてスケーリング変換を適用して分数階 p-ソボレフ流の正値解の時間大域存在を証明する．

４. 研究成果

(1) 主要部のみをもつ二重非線形分数階 p-ラプラス方程式を分数階 p-ソボレフ流に変換する固有のスケーリング変換の導出（5．主な発表論文[雑誌論文] 5 番目）

(2) 主要部のみをもつ二重非線形退化特異分数階放物型方程式の初期値零境界値問題に対して，弱解が時間大域的に存在することを証明した．この弱解はエネルギー不等式を満たす．とくに，弱解のべき乗時間弱微分は時空２乗積分可能であり， 体積不等式が成り立つ． この方程式の弱解の大域存在およびこれら弱解の性質は， 分数階 p-ソボレフ流への応用において基本的である（5．主な発表論文[雑誌論文] 4 番目）．

分数階 p-ソボレフ流に関連する偏微分 p-ソボレフ流および二重非線形放物型偏微分方程式について以下の結果を得た：

(3) 主要部のみをもつ二重非線形退化特異放物型偏微分方程式の初期値零境界値問題に対して，弱解が時間大域的に存在することを証明した．この弱解はエネルギー不等式を満たす．とくに，弱解のべき乗時間弱微分は時空２乗積分可能であり，体積不等式が成り立つ（5．主な発表論文[雑誌論文] 2 番目）．

(4) 二重非線形退化特異放物型偏微分方程式に対する非負弱解の正値性伝播を証明した．これを応用して， 時間発展 p-ラプラス偏微分方程式の弱解のヘルダー正則性を証明した （5． 主な発表論文[雑誌論文] 1 番目）

(5) 二重非線形退化特異放物型偏微分方程式の弱解の有限時間消滅を証明した．この証明では，二重非線形退化特異放物型偏微分方程式に対する非負弱解の正値性伝播を応用した新しい方法が適用されている（5．主な発表論文[雑誌論文] 3 番目）

(6) 偏微分 p-ソボレフ流の正則弱解の時間大域存在とその解の時間無限大における体積集中現象を証明した （論文投稿準備中）． 偏微分 p-ソボレフ流の弱解の局所有界性を証明し， 体積集中現象の証明に応用している．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計5件（うち査読付論文　5件／うち国際共著　2件／うちオープンアクセス　1件）

１．著者名 Masashi misawa, Kenta Nakamura	４．巻 33:33
２．論文標題 Existence of a Sign-Changing Weak Solution to Doubly Nonlinear Parabolic Equations	５．発行年 2023年
３．雑誌名 The journal of Geometric Analysis	６．最初と最後の頁 33:33
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s12220-022-01087-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 Masashi Misawa, Kenta Nakamura, Md Abu Hanif Sarkar	４．巻 30:43
２．論文標題 A finite extinction profile and optimal decay for a fast diffusive doubly nonlinear equation	５．発行年 2023年
３．雑誌名 Nonlinear Differ. Equ. Appl.	６．最初と最後の頁 30/43
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00030-023-00851-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

１．著者名 Masashi Misawa, Nobumitsu Nakauchi	４．巻 36 (1)-(2)
２．論文標題 On the finite-time blow-up of symphonic map flows	５．発行年 2023年
３．雑誌名 Differential and Integral Equations	６．最初と最後の頁 93-132
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Nobuyuki Kato, Masashi Misawa, Yoshihiko Yamaura	４．巻 200, no.3
２．論文標題 The discrete Morse flow method for parabolic p-Laplacian systems	５．発行年 2021年
３．雑誌名 Ann. Mat. Pura Appl.	６．最初と最後の頁 1245-1275
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10231-020-01036-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Kuusi, Tuomo; Misawa, Masashi; Nakamura, Kenta	４．巻 279
２．論文標題 Global existence for the p-Sobolev flow	５．発行年 2021年
３．雑誌名 J. Differential Equations	６．最初と最後の頁 245-281
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jde.2021.01.018	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕　計4件（うち招待講演　4件／うち国際学会　0件）

１．発表者名 三沢 正史
２．発表標題 Global existence of the p-Sobolev flow
３．学会等名 基盤(S)(桑江一洋代表)キックオフミーティング「測度距離空間の解析と幾何およびその展望 」（招待講演）
４．発表年 2022年

１．発表者名 三沢 正史
２．発表標題 ソボレフ流と二重非線形放物型方程式について
３．学会等名 RIMS共同研究(公開型)「関数空間論とその周辺」（招待講演）
４．発表年 2023年

１．発表者名 三沢 正史
２．発表標題 ソボレフ不等式に関わる二重非線形放物型方程式の大域存在
３．学会等名 応用解析研究会(早稲田大学西早稲田キャンパス)（招待講演）
４．発表年 2022年

1．発表者名 三沢 正史
2．発表標題 ソボレフ流の大域存在と退化特異放物型方程式の正則性
3．学会等名 非線形偏微分方程式と走化性(北九州国際会議場)（招待講演）
4．発表年 2022年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
フィンランド	Aalto University	University of Helsinki		