

令和 6 年 6 月 17 日現在

機関番号：34428

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2021～2023

課題番号：21K03360

研究課題名（和文）障害物を持つ斜面を流下する粒子流の数学解析

研究課題名（英文）Mathematical analysis of granular flow down a slope with obstacles.

研究代表者

友枝 恭子（Tomoeda, Kyoko）

摂南大学・理工学部・准教授

研究者番号：90611898

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,600,000円

研究成果の概要（和文）：円柱状の障害物を持つ斜面を流下する粒子流について考察する。障害物にぶつかった粒状体による弧状衝撃波の存在を調べるために、先行研究で提唱されている数理モデルは非斉次項を持つ保存則系(balance laws)のリーマン問題である。この問題について考察し、外力項が非常に小さい場合、弱解を構成するLax衝撃波の存在を証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

先行研究によって提唱された数理モデルは、動摩擦力が臨界を超えると発生する雪崩のような現象に対しても対応できるように導出されている。本研究で数理モデルを考察することで、将来的に雪崩のような自然災害に対する対応策を数学的立場から示すための第一歩となることが期待できる。その点において社会的意義のある研究である。また本研究では、外力項が小さい場合ではあるが、数学の立場から衝撃波の存在を示すことができた。実験においても、障害物付近における衝撃波の存在が確認されていることから、本成果は数学のみならず、他分野においても意義のある成果である。

研究成果の概要（英文）：We consider a granular flow flowing down a slope with a cylindrical obstacle. We investigate the existence of arcuate shock waves caused by granules hitting obstacles. The mathematical model proposed in previous studies is a Riemann problem of a balance laws system with inhomogeneous terms. When the external force term is very small, we considered this problem and showed the existence of a Lax shock wave that constitutes a weak solution.

研究分野：応用数学

キーワード：粒子流 保存則系 balance law 衝撃波 リーマン問題

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

斜面を流下する粒子流の挙動については、1980年～2010年代にかけて Huber, Savage, Hutter, Grey 等が行った実験により調べられている。特に障害物のある場合、障害物の周りでの粒子流を調べた結果として Cui-Gray(2013)による粒子流実験がある。具体的には以下の通りである：傾斜角を持つアクリル製(縦 30cm, 横 60cm)の平滑な斜面の中央に直径 3cm の円筒形金属型シリンダーを障害物として置き、分散が均一のガラスビーズ(直径 250～425 μm)を流す。そして、ガラスビーズ全体によって形成される粒状体表面(概形)を上から観察する。この実験の下、粒状体の加速度は斜面勾配によって変化し、粒状体の挙動はフルード数(流体の慣性力と重力の比を表す無次元量)によって次のパターンに変化する。

ガラスビーズ流入時のフルード数は 1.4～2.1 であり、粒子流は射流である。そこから粒子流は斜面の加速と共に増大していき、それに伴ってフルード数は増大する。そして障害物付近でのフルード数は 6.04～6.87 になり、射流状態の流れが障害物にぶつかることで弧状衝撃波面が発生する。特に、傾斜角が 36 度の場合(フルード数 6 に対応)、円筒形金属型シリンダーにぶつかった粒状体は物体前方で弧状衝撃波を形成し、物体後方においては真空領域が形成される。実験においては、斜面を流下する粒子流の挙動と衝撃波や希薄波の関連性は解明されつつある一方で、理論的説明についてはまだ不十分な部分がある。

円柱状の障害物を持つ粒子の流れを連続体として捉えた場合、先行研究で提唱される数理モデルは流状体の厚さ $h(t, x, y)$ と流速 $(u(t, x, y), v(t, x, y))$ によって与えられる balance laws のリーマン問題であるが、(提唱された数理モデルも含めて)balance laws のリーマン問題に対する数学理論や数値解析手法の構築についてはほとんど成されていない状況である。

2. 研究の目的

粒子流の現象について、その挙動は流れる環境や状態によって様々である。粒子流において現れる挙動変化は、微視的な視点で捉えると個々の粒子間の摩擦や衝突によるものであるのに対し、巨視的な視点で捉えるとせん断応力や垂直応力によるものである。円柱状の障害物を持つ斜面を流下する粒子流の場合、この障害物回りにおける巨視的な挙動変化として弧状衝撃波が形成されることが物理実験によって知られている。この現象に対して提唱される数理モデルは、非斉次項を持つ保存則系(balance law)であるが、この数理モデルの弧状衝撃波に対する数学解析はほとんど行われていない。

一方、数学分野において、保存則系や balance law のリーマン問題に対する考察は、いくつかの先行研究によってなされているものの、先行研究で得られた数学理論を実際の現象から提唱された数理モデルに適用されている例はかなり少ない。その理由の一つとして、物理現象から導出される数理モデルの複雑さがある。先述した円柱状の障害物を持つ斜面を流下する粒子流の場合、Savage や Gray 等によって数理モデルは提唱されている。これらの数理モデルの場合、動摩擦力が臨界を超えると発生する雪崩のような現象に対しても対応できるように導出されているため、外力としての摩擦項を無視することができず、さらには複雑化してしまい、数学的に取り扱うことが困難である。しかし、粒状体が一定に流れている最中のような摩擦の影響が大きい場面においては、斉次保存則系や外力項を更に簡略化した数理モデルで対応可能となるのではないかと期待できる。そこで本研究では、以下の項目についての考察を行い、粒子流現象に対する数学解析を目指す。

[1] 先行研究で定式化された数理モデルの更なる縮約化

[2] 数理モデルに対する弱解の存在検証法

[3] 典型的な弧状衝撃波面の存在を検証するための数学理論および数値計算法

3. 研究の方法

2016 年度から現在に至るまで、研究代表者は研究分担者と共に斜面を流下するシリコンオイル

とガラスビーズ懸濁液についての数学解析を行っており、そこで培った研究成果や知見を踏まえることで本研究目的を達成するための考察を行った。具体的な方法については次の通りである。

1) 先行研究で行われている粒子流の実験の再現を行うにあたり、関連する論文を読んで情報収集を行った。論文に記載されている実験結果に至るまでの流体の動き(特に挙動の遷移)を観察するため、Cui-Gray(2013)で行われている粒子流実験の再現を行った。具体的には、アクリル製の平滑な斜面の中央に円筒形金属型シリンダーを障害物として置き、粒径や密度が均一のビーズを流し、ビーズ全体の挙動を調べる。再現実験を行うにあたり簡易装置の作成は本学テクニクセンターに依頼した。作成で必要となるアクリル板等の消耗品は購入したが、障害物としてアクリル板に設置する金属シリンダーについては、本学の廃材を再利用した。アクリル傾斜板に流すビーズについて、Cui-Gray(2013)ではノンパレイユ(スプリンクル)を使用しているが、ビーズの粒径や密度が均一ではないため、粒子・密度が均一のビーズを購入し使用した。

2) 粒子流の現象に対応した数理モデルの導出手法から提唱された数理モデルに対する数学解析手法や数値解析手法の構築を行うにあたり、関連する参考文献や資料による情報収集は不可欠である。そこで、考察するトピックに伴う文献や資料の収集を行った。粒子流の現象に対応した数理モデルの導出法については、Savage や Gray による論文を中心として関連する参考文献等の情報収集を行った。また、数理モデルに対する数学解析手法や数値解析手法の構築については、(balance laws も含めた)保存則系については Smoller や Dafermos による書籍、Liu による論文等を参考にした。また、空間多次元の保存則系については Zhang や Majda による書籍や文献を中心に必要な情報を収集した。

3) 数理モデルの数学解析による手法の構築や解のダイナミクスを調べるために必要な数学理論とそれに基づいた計算法の構築を行うためには、多岐にわたる情報収集が必要である。しかしながら、研究代表者・研究分担者 2 名のみによる参考文献の調査では、必要な知見を十分に得るには非効率、あるいはフォローしきれない部分も生じ得る。そのため、国内外の研究者との研究打ち合わせによる情報収集も不可欠である。2021 年度の前半までコロナ禍の自粛影響により、研究集会やセミナー参加による対面での研究打ち合わせについて難しい部分があった。そこで、オンラインでのセミナー「混相流」勉強会を開催し、関連する分野の専門家から教を請うことで、必要な研究情報を収集した。また、2 週間から 1 カ月に 1 回の頻度で研究代表者と研究打ち合わせをオンラインで行った。2021 年度の後半より、徐々に国内外の出張が緩和されたので、オンラインでの研究打ち合わせに加えて、対面による研究打ち合わせも行った。

4. 研究成果

先に述べた 3. 研究の方法 1) ~ 3) について、それぞれ以下の成果を得た。

1) 再現実験により、障害物(円筒形金属型シリンダー)にぶつかった粒状体による物体前方における弧状衝撃波、更には物体後方において真空領域が確認された。Cui-Gray(2013)で観測された結果と同じような現象がみられた。Cui-Gray(2013)では、流す粒子としてスプリンクルが使用されていたが、それとほぼ同じ粒径のガラスビーズについても同様の現象が確認できた。弧状衝撃波を形成するまでの粒子流の遷移について、ガラスビーズを流した直後は、障害物にぶつかりながらも通常の一方向に流れており、時間が経過することで物体前方における弧状衝撃波と物体後方における真空領域が形成された。ただし、この実験においては粒子の流れ自体が非常に速いため、より精度良く観測するための工夫が必要である。

2) 先行研究で定式化されている粒子流モデルは非斉次項を持つ保存則系(balance laws)である。これは、例えば動摩擦力が臨界を超えると発生する雪崩のような現象に対しても対応できるためである。しかし、必ずしも摩擦の影響を考慮しなくても良いような粒子流については、今までどおり保存則系によりその運動の挙動を調べることができる。そこで、Savage や Gray の数理モデルを縮約化した空間 1 次元の保存則系のリーマン問題を考察した。その結果、このリーマン問題の場合、弱解を構成する 1-衝撃波を Mathematica によって捉えることはできたが、2-衝撃波はユゴニオ曲線が 2-エントロピー条件から外れるため、Mathematica による計算では捉えることが出来なかった。今後の課題として、より精度の良い数値解析手法によってとらえることが必要である。得られた成果について、「北陸応用数理研究会 2021」、「数学と現象 in 長瀬」で報告した。

3) 上記に関連して、平滑な斜面を流下する懸濁液については、壁面効果を取り入れた場合につい

て以下の結果が得られた。

[1]ガラスビーズの体積分率と斜面の傾斜角が共に高い場合、懸濁液先端で生じる隆起部分は 2 種類の Lax 衝撃波 (1-衝撃波と 2-衝撃波) によるものとされている。研究代表者と研究分担者は数値計算援用による数学解析により、隆起現象を表現する 2 種類の Lax 衝撃波の存在を示すことができた。

[2]ガラスビーズの粒径と衝撃波曲線のプロファイルとの関連性について、次の結果を得た。1-衝撃波の曲線の長さは粒径に依存している。つまり、粒径によって懸濁液先端で生じる隆起の高さが変化するということが分かった。2-衝撃波のプロファイルについて、粒径が非常に小さい (例えば 0.01 のような) 場合は平坦な直線状になるが、粒径がある程度大きい (例えば 0.2 のような) 場合はカーブした曲線状になる。

上記の成果について、論文発表の他、国際会議「Algoritmy2024」や国内の研究集会やセミナーで発表した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Kaname Matsue	4. 巻 36
2. 論文標題 Rigorous numerics for fast-slow systems	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Sugaku Expositions	6. 最初と最後の頁 221-253
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/suga/483	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Norio Konno, Kaname Matsue, Etsuo Segawa	4. 巻 190
2. 論文標題 A Crossover Between Open Quantum Random Walks to Quantum Walks	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Statistical Physics	6. 最初と最後の頁 1-30
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10955-023-03211-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Matsue Kaname, Matalon Moshe	4. 巻 -
2. 論文標題 Dynamics of hydrodynamically unstable premixed flames in a gravitational field ? local and global bifurcation structures	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Combustion Theory and Modelling	6. 最初と最後の頁 1~29
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1080/13647830.2023.2165968	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計18件（うち招待講演 13件/うち国際学会 8件）

1. 発表者名 友枝恭子
2. 発表標題 斜面を流下する懸濁液の数学解析～斜面の状態効果を考慮した近似方程式の導出～
3. 学会等名 数学と現象 in 伊豆（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 友枝恭子
2. 発表標題 斜面を流下する懸濁液の隆起現象に対する数学的考察
3. 学会等名 RIMS共同研究(公開型) 量子場の数理論とその周辺(招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 友枝恭子
2. 発表標題 A mathematical treatment of the bump structure of particle-laden flows with particle features
3. 学会等名 数学と現象 in 山中湖(招待講演)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Kyoko Tomoeda
2. 発表標題 A mathematical treatment of the bump structure of particle-laden flows with particle features
3. 学会等名 Algoritmy2024(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 松江要
2. 発表標題 常微分方程式の爆発解と無限遠ダイナミクス: 基礎形・漸近展開・非自励系
3. 学会等名 さいたま数理解析セミナー(招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Kaname Matsue
2. 発表標題 Finite-Time Singularity and Dynamics at Infinity : Characterization and Asymptotic Expansions
3. 学会等名 10th International Congress on Industrial and Applied Mathematics (ICIAM 2023 TOKYO) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Kaname Matsue
2. 発表標題 Nonlinear dynamics of hydrodynamically unstable premixed flames with physicochemical interactions
3. 学会等名 Forum "Math-for-Industry" 2023 - MfI 2.0 - (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 松江 要
2. 発表標題 微分方程式の有限時間特異性：ラクな計算への長～い道程
3. 学会等名 RIMS共同研究（公開型）「新時代における高性能科学技術計算法の探究」（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 松江 要
2. 発表標題 無限遠ダイナミクスと非自励的爆発
3. 学会等名 2023年度応用数学合同研究集会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 松江 要
2. 発表標題 微分方程式の有限時間特異性：幾何学的・包括的記述を目指して
3. 学会等名 数学と脳科学の連携に向けたワークショップ
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Kaname Matsue
2. 発表標題 Interaction between flame and physicochemical phenomena based on asymptotic studies: continued
3. 学会等名 Mathematical Research in Energy Systems: I2CNER-IMI Joint International Workshop (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Kaname Matsue
2. 発表標題 A unified characterization of blow-up solutions for ODEs through dynamics at infinity
3. 学会等名 ANZIAM 2024 Conference (国際学会)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Kaname Matsue
2. 発表標題 Nonlinear dynamics of hydrodynamically unstable premixed flames with physicochemical interactions
3. 学会等名 Algoritmy2024 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 松江 要
2. 発表標題 微分方程式における有限時間特異性：次に進む前のレビュー
3. 学会等名 多分野交流会@東京都立大学（招待講演）
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 友枝恭子
2. 発表標題 障害物付近の粒子流で衝撃波は発生するのか？
3. 学会等名 数学と現象 in 長瀬（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Kaname Matsue, Moshe Matalon
2. 発表標題 Dynamics of hydrodynamically unstable premixed flames in a gravitational field
3. 学会等名 ANZIAM2023 (Australian and New Zealand Industrial and Applied Mathematics) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 松江 要
2. 発表標題 炎と音、時々他のもの -Sivashinsky方程式と分岐理論の可能性-
3. 学会等名 IMI共同利用：消炎や振動を含む不安定燃焼の数理（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Kaname Matsue
2. 発表標題 Interaction between flame and physical phenomena - Asymptotic studies, results and reviews -
3. 学会等名 I2CNER-IMI Joint International Workshop - Engineering and Mathematics: Where Do We Meet?- (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	松江 要 (Matsue Kaname) (70610046)	九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・教授 (17102)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
米国	UIUC			
カナダ	McGill University			