

令和 6 年 6 月 18 日現在

機関番号：13904

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2021～2023

課題番号：21K03361

研究課題名（和文）幾何学的視点からの固有値計算法の開発

研究課題名（英文）Development of Eigenvalue Calculation Methods from a Geometric Perspective

研究代表者

豊永 憲治（Toyonaga, Kenji）

豊橋技術科学大学・工学（系）研究科（研究院）・准教授

研究者番号：80390532

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,300,000円

研究成果の概要（和文）：グラフの幾何的構造と代数的な固有値の多重度の変化についての関連性について研究を行った。特に、一般のグラフにおいて頂点を除いたときの対応する部分行列における固有値の代数的および幾何的多重度の変化についての、これまでにわかっていなかった特徴を明らかになった。特に、Parter vertexに対する特徴であるdowner branchの存在を一般のグラフについて明らかにした。また、downer edge cycleを除いたときの多重度の変化についても明らかになった。

数値計算の分野へのグラフスペクトル理論の応用を試みたが、計算コストが大きく実用的には課題があることが判明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

固有値はさまざまな分野において、広く使われている数学的値であり、対象となる数学的写像の固有値の変化を調べることは、大変意味のあることである。近年、代数的な行列の固有方程式の解である固有値と、幾何的なグラフ構造の間の関連があることがわかってきており、幾何学的な構造から代数的な固有値の分布についての新しい知見を導くことは意味のあることである。また、グラフスペクトル理論の数値計算や情報処理分野への応用を試みたことは新規の研究であったと考える。精度保証付き数値計算への応用は計算コストが大きく、実用的ではないことがわかったが、グラフを用いたステガノグラフィへの応用を試み、情報を埋め込める方法が示された。

研究成果の概要（英文）：We studied the relationship between the geometric structure of graphs and the algebraic multiplicity variation of eigenvalues. In particular, we have identified previously unknown features of the algebraic and geometric multiplicity variation of eigenvalues in the corresponding submatrices of general graphs, when the vertices are removed. In particular, the existence of downer branches, a feature for parter vertexes, is revealed for general graphs. The change in multiplicity was also clarified when the vertices or edges on a downer edge cycle are removed.

We attempted to apply graph spectrum theory to the field of numerical computation, but found that the computational cost is too high for practical use.

研究分野：Applied Mathematics

キーワード：Eigenvalue Multiplicity Graph

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

グラフが木の場合の固有値の多重度とグラフ構造の関係については、これまで海外の研究者により、よく研究されてきていたが、グラフが一般グラフの場合や、グラフに対応する行列で対称ではない場合については、これまでほとんど研究されてはいなかったため、非対称の場合も含め、固有値の多重度とグラフの構造について研究を行った。また、固有値の多重度が大きい場合の精度保証付き数値計算による固有値の包み込み法では、不動点定理を使った方法があるが、これまでグラフスペクトル理論を用いた手法を試みた。

2. 研究の目的

本研究は、代数的な行列の固有方程式の解である固有値と、幾何的なグラフ構造の間の関連性について研究し、幾何学的な構造から代数的な固有値の分布についての新しい知見を導くことを目的とする。幾何学的な構造から固有値の存在に対する制約を考察することで、さまざまな分野で必要とされる代数的な固有値をグラフの幾何学的な側面から研究することを目的とした。さらにグラフスペクトル理論の固有値の数値計算法への応用として、特に数学的に精度が厳密に保証される精度保証付き数値計算への応用や、情報処理分野への応用を目的とした。

3. 研究の方法

グラフが一般グラフの場合や、グラフに対応する行列が組合わさ的に対称ではない場合については、これまでほとんど研究されてはいなかったため、非対称の場合も含め、固有値の多重度とグラフの構造について研究を行った。

また、固有値の多重度が大きい場合の精度保証付き数値計算へのグラフスペクトル理論の応用を試みた。また、グラフを用いたステガノグラフィへのスペクトラルグラフ理論の応用を行った。

4. 研究成果

あるグラフ構造をもつ行列の固有値の多重度とグラフの幾何構造の特徴について、研究を行った。特に、一般のグラフにおいて、頂点を除いたときの代数的多重度または幾何的多重度の変化により、頂点は3種類に分類されるが、一般のグラフにおける頂点が Parter vertex となる必要十分条件を明らかにすることができた。その際に必要となる Downer branch の必要性を明らかにした。また、2-downer edge はサイクルを形成することを明らかにし、三角形の 2-downer edge cycle において、辺や頂点をすべて除いたときの多重度の変化について明らかにした。

また、精度保証付き通知計算では、一般に、行列のサイズが大きくなり、固有値の多重度が増すと、固有値を包み込む区間の幅は次第に大きくなっていくが、グラフスペクトル理論における視点をを用い、着目している固有値の多重度が1つ上がる頂点 Parter vertex を除くことで、多重固有値を包み込めることはわかったが、精度保証付き数値計算の実行速度の面からみると、他の手法と比べ、非常に遅いという問題点があることがわかった。したがって、この方法を進展させるには、計算過程の効率化が今後の課題となることがわかった。

もう一つの課題であるグラフスペクトル理論の応用として、グラフを使ったステガノグラフィへの応用を試みた。情報のある媒体に埋め込んで通信する手法をステガノグラフィというが、グラフ構造に情報を埋め込むステガノグラフィにおいて、辺を追加・削除することで、鍵となる複数の区間に含まれる固有値の数の偶奇を操作し、それによりビット値を変化させて情報を送る手法を新しく考案した。

国際論文：

1. The effect of removing a 2-downer edge or a cut 2-downer edge triangle for an eigenvalue. Kenji Toyonaga, *Special Matrices* 11 (2023), spma-2022-0186
2. Parter Vertices and Generalization of the Downer Branch Mechanism in the General Setting. Kenji Toyonaga, Charles Johnson, *Linear and Multilinear Algebra*, (2023)

学会発表：

1. Generalization of the Downer Branch Mechanism and Edge Classification, Japanese Conference on Combinatorics and its Applications 2023, Kenji Toyonaga.
2. Classification of edges due to the change in multiplicity of an eigenvalue, 10th International Congress on Industrial and Applied Mathematics, Kenji Toyonaga.
3. グラフスペクトルを用いたグラフに対するステガノグラフィ,

情報セキュリティ研究会,

川口和久, 豊永憲治, 高橋茶子, 中井雄士, 鈴木幸太郎.

4. グラフスペクトルのステガノグラフィへの応用,
日本応用数学会第19回研究部会連合発表会
川口和久, 豊永憲治, 高橋茶子, 中井雄士, 鈴木幸太郎.

5. グラフ変形による固有値の多重度の変化について,
JCCA2022, 離散数学とその応用研究集会 2022,
豊永憲治

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Kenji Toyonaga	4. 巻 11
2. 論文標題 The effect of removing a 2-downer edge or a cut 2-downer edge triangle for an eigenvalue	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Special Matrices	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Kenji Toyonaga, Charles R. Johnson	4. 巻 -
2. 論文標題 Parter Vertices and Generalization of the Downer Branch Mechanism in the General Setting	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Linear and Multilinear Algebra	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1080/03081087.2023.2176414	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計5件（うち招待講演 0件/うち国際学会 1件）

1. 発表者名 Kenji Toyonaga
2. 発表標題 Classification of edges due to the change in multiplicity of an eigenvalue
3. 学会等名 10th International Congress on Industrial and Applied Mathematics（国際学会）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 川口和久, 豊永憲治, 高橋茶子, 中井雄士, 鈴木幸太郎
2. 発表標題 グラフスペクトルのステガノグラフィへの応用
3. 学会等名 日本応用数理学会第19回研究部会連合発表会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 川口和久, 豊永憲治, 高橋茶子, 中井雄士, 鈴木幸太郎
2. 発表標題 グラフスペクトルを用いたグラフに対するステガノグラフィ
3. 学会等名 RCC・ISEC・IT・WBS合同研究会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 豊永憲治
2. 発表標題 Generalization of the Downer Branch Mechanism and Edge Classification
3. 学会等名 Japanese Conference on Combinatorics and its Applications 2023
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 豊永憲治
2. 発表標題 グラフ変形による固有値の多重度の変化について
3. 学会等名 離散数学とその応用研究集会2022
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
米国	The College of William and Mary			