

令和 6 年 6 月 7 日現在

機関番号：12612

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2021～2023

課題番号：21K03366

研究課題名（和文）佐藤超函数論による解析関数の数値解析

研究課題名（英文）Numerical analysis of analytic functions based on hyperfunction theory

研究代表者

緒方 秀教 (Ogata, Hidenori)

電気通信大学・大学院情報理工学研究科・教授

研究者番号：50242037

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,000,000円

研究成果の概要（和文）：佐藤超函数論は複素関数論に基づく一般化関数の理論である。この理論では、超函数と呼ばれる一般化関数を定義関数と呼ばれる複素解析関数の実軸上における境界値の差で表し、様々な計算は定義関数により行う。本研究ではこのことに着目した関数近似・数値微分・数値不定積分、常微分方程式初期値問題の数値解法を提案した。

本研究は解析関数の数値解析の研究でもある。その観点から、変数変換を用いる数値計算の研究も行った。具体的には、数値積分公式としてよく知られるIMT型公式で用いられるIMT型変換を用い、数値不定積分法、常微分方程式の数値解法などを考案した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

科学技術計算において解析関数はよく現れ、その数値計算法は精力的に研究されている。佐藤超函数論は複素関数論に基づく一般化関数の理論であり、それを用いればデルタ関数など特異性のある関数が複素解析関数を用いて記述される。したがって、佐藤超函数論を用いれば、数値的に扱いの困難な特性を持つ関数の計算が、よく研究されている解析関数の数値計算法を応用して行うことができる。その意味で、本研究は数値計算の可能性を大きく広げたと言える。

数値計算の変数変換技法は複素関数論と関連し、その意味で本研究と関連する。IMT型変換はDE変換と比べてあまり研究されておらず、その意味で同研究分野の可能性を大きく広げたと言える。

研究成果の概要（英文）：Hyperfunction theory is a theory of generalized functions based on complex function theory, where generalized functions called hyperfunctions are expressed as the differences of the boundary values on the real axis of complex analytic functions called defining functions. Computations of hyperfunctions are carried out using the defining functions. Remarking it, we proposed a method of function approximation, numerical differentiation, numerical indefinite integration and a numerical solver of initial value problems of ordinary differential equations based on hyperfunction theory.

Our study is also a study of numerical analysis of analytic functions. In this point of view, we studied numerical computations using variable transformations. To be specific, we proposed a numerical indefinite integration, a numerical solution method of ordinary differential equations and so on using the IMT-type transform, which is used the IMT-type numerical integration formula.

研究分野：数値解析

キーワード：数値解析 数値計算 超函数 佐藤超函数 解析関数 複素関数論 複素解析 変数変換

1. 研究開始当初の背景

科学技術計算では解析関数はよく現れ、数値解析の分野でも解析関数に対する複素関数論に基づく数値解析の研究は長年精力的に行われている。その代表的なものは、高橋・森による数値積分の理論的研究およびDE 公式(二重指数関数型数値積分公式)の考案である。この研究ではまず、台形公式、Simpson 公式、Gauss 型公式など既存の数値積分公式について、複素積分を用いて数値積分誤差を理論的に見積もる方法を考案し、現在広く用いられている数値積分公式であるDE 公式を開発した。一方、海外では、Stenger 等によるSinc 数値計算法の研究がある。

では、複素関数論を(実解析である)数値解析に適用することの意義は何か?それを深く理解したい、そして、複素関数論に基づく数値解析を今後どのように発展させられるだろうか?というのが、本研究の動機であり根本的な「問い」である。この学術的問い・関心に対し重要な示唆を与えたのが、平山による数値積分法である。これは、求める積分を複素周回積分に変換して計算するユニークな方法であるが、緒方はこの数値積分法は佐藤超関数論と関連があることを見抜いた。そして、佐藤超関数論に複素関数論と数値解析を結びつける鍵があると予想した。これが、本研究を着手するに至った背景である。

このように、複素関数論と数値解析の関係が当研究のテーマであり、そこから佐藤超関数論に基づく数値計算の研究を行うことにしたが、研究途中で同じテーマに関連して数値計算における変数変換技法のアイデアを得、この研究も行うことにした。この詳細は下記に記す。

2. 研究の目的

研究目的(1): 佐藤超関数論に基づく数値解析 本研究の当初の目的は、佐藤超関数論に基づく数値解析の理論的探求およびその実用化であった。佐藤超関数論とは、Dirac のデルタ関数などの一般化関数を複素解析関数で表し微積分等諸演算を行う、複素関数論に基づく一般化関数論である。この理論では、超関数(hyperfunction)と呼ばれる一般化関数 $f(x)$ を、ある複素解析関数 $F(z)$ の実軸上の境界値の差 $f(x) = [F(z)] := F(x + i0) - F(x - i0)$ で表す($F(z)$ を超関数 $f(x)$ の定義関数とよぶ)。例えば、Dirac のデルタ関数は超関数として次で与えられる。

$$\delta(x) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{x + i0} - \frac{1}{x - i0} \right)$$

そして、Heaviside ステップ関数は超関数として次で与えられる。

$$H(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} = \left[-\frac{1}{2\pi i} \log(-z) \right].$$

佐藤超関数論は数値解析で何故に有効か?どのようにすれば数値解析で活かせるか?それを明確にすることが本研究目的である。これまで、数値積分、Fourier変換計算に対し佐藤超関数論に基づく数値計算法を考案したが、より多くの数値計算に対し計算法を考案しその性能を確かめる。

研究目的(2): 数値計算における変数変換技法 本研究の途中で、DE数値積分公式などの変数変換技法に関する新しいアイデアを思いついたので、それも研究に加えることにした。そのアイデアとは、IMT型数値積分公式で用いられるIMT型変数変換を用いた数値計算である。DE公式で用いられるDE変換は定積分以外の数値計算にすでに応用されていた。ところが緒方は、

IMT型変換も数値積分以外の数値計算に応用できることを見抜いた．そこで，IMT型変換を用いた数値計算の研究も行うことにした．

3．研究の方法

「研究目的」に記した事項について，具体的に次の研究を行う．

佐藤超函数論に基づく数値解析 佐藤超函数論による数値計算の鍵は定義関数である．Fourier変換の数値計算を例に説明する．関数 $g(x)$ のFourier変換 $\mathcal{F}[g](\xi)$ は次で表される．

$$\mathcal{F}[g](\xi) = F_+(\xi + i0) - F_-(\xi - i0) := \lim_{\epsilon \downarrow 0} \left\{ \int_0^{\infty} g(-x) e^{2\pi i(\xi + i\epsilon)x} dx + \mathcal{F}[g](x) dx \right\}$$

つまり，周波数 ξ を複素数に拡張して得られる $F_{\pm}(\zeta)$ を定義関数にもつ超函数としてFourier変換が与えられるのである．Fourier変換自体は全無限区間上の振動積分で数値計算が難しいが，定義関数 $F_{\pm}(\xi \pm i\epsilon)$ は被積分関数に指数関数的減衰する項 $e^{-2\pi\epsilon|x|}$ を含むので計算が容易になる．この定義関数を複素平面上で計算して，実軸上に解析接続することにより所望のFourier変換を得る．つまり，**複素平面上の計算しやすい所で計算を行ってその結果を実軸上に移す（解析接続する）**ことにより所望の計算結果を得るのである．これが佐藤超函数論に基づく数値計算の指導原理である．そして，複素平面上で計算しやすいものが定義関数である．

一般には，与えられた区間 (a, b) 上の超函数 $f(x)$ に対し次の「標準定義関数」がもとの $f(x)$ の定義関数のひとつであることが知られている．

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f(x)}{x - z} dx$$

そこで，近似計算の対象となる関数 $f(x)$ を超函数とみなして標準定義関数を近似的に求め，それをもとにして様々な数値計算をする．例えば，標準定義関数 $F(z)$ が数値的に得られたら， $\int^z F(\zeta) d\zeta$ を定義関数として不定積分が， $F'(z)$ を定義関数として導関数が数値的に得られる．

数値計算における変数変換技法 数値積分においてDE変換，IMT型変換がよく知られている．そのうちDE変換は，Sinc近似と組み合わせる数値微分，積分方程式，微分方程式など積分以外の様々な数値計算に応用されている．ところが最近緒方は，IMT型変換も「周期Sinc近似」と組み合わせればDE変換と同様，様々な数値計算に応用できることを見抜いた．周期Sinc近似とは周期関数に対するSinc近似の改良版であり，周期的な解析関数に対して高性能である．IMT型数値積分公式において，変数変換後の被積分関数は台がコンパクトな C^{∞} 級関数（テスト関数）となり，全無限区間上で（解析的でないが） C^{∞} 級な周期関数に拡張できる．これに着目して，数値計算の対象となる関数をIMT型変換で変数変換して周期Sinc近似することにより関数近似を行えば，様々な数値計算を高精度で行うことができる．この観点から，数値不定積分，常微分方程式などに対しIMT型変数変換を用いた数値解法を構築する．

4．研究成果

本研究は2021～2023年度の3年度に渡る．各年度の研究成果は次のとおりである．

2021年度

1．佐藤超函数論に基づく関数近似、数値微分および数値不定積分 近似の対象とする関数に対し，標準定義関数を数値積分および連分数を用いることにより数値的に求め，それを用いて関数近似を超関数として与え，さらに，標準定義関数の導関数・原始関数をもちいて数値微分・数値不定積分を与える．そして，数値実験により本方法の有効性を確かめた．本研究の成

果は国内学会で口頭発表し、和文誌に論文投稿した。

2. IMT型変数変換を用いた数値不定積分および第2種Volterra型積分方程式の数値解法 IMT型変換を周期Sinc近似と組み合わせて数値不定積分および1次元第2種Volterra積分方程式に応用する数値計算法を考案した。そして、数値実験および理論誤差解析によりその計算法の有効性を示した。本研究の成果について、数値不定積分法は国内学会で口頭発表し和文誌に論文投稿して採録された。積分方程式の数値解法は国内学会で口頭発表した。

2022 年度

佐藤超函数論に基づく数値不定積分法を考案した。超函数論では不定積分はある複素積分で定義される。そこで、被積分関数をChebyshev補間により複素領域上に解析接続して、その複素積分を台形則により近似計算することにより不定積分を求めるのが本方法である。

一方、IMT型変換を用いた数値不定積分法も考案した。「研究の方法」で述べたように、IMT公式で用いられているIMT型変換も、周期関数に対するSinc近似と組み合わせることにより、数値積分以外の数値計算に応用できることを示している。そして、そのアイデアに基づいた数値不定積分法を考案した。

当年度はこれら2種の数値不定積分法を応用した常微分方程式の数値解法を提案し、理論解析と数値実験によりその有効性を示した。この方法は、問題とする常微分方程式を同等な積分方程式に書き直し、これを上記の数値不定積分と「Picard逐次近似」を用いて解くことにより数値解を求めるというものである。図1に常微分方程式初期値問題

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\sin x, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1 \quad (1)$$

に対する本研究のIMT-DE変換を用いた数値解法の計算結果を示す。

常微分方程式の数値解法として従来よく用いられているRunge-Kutta法などは、誤差は関数評価回数の負べき乗で減衰するが、本研究の方法では関数評価回数に対し指数関数的収束するという高精度性をもつ。さらに、本研究の方法は並列計算の可能性も期待される。

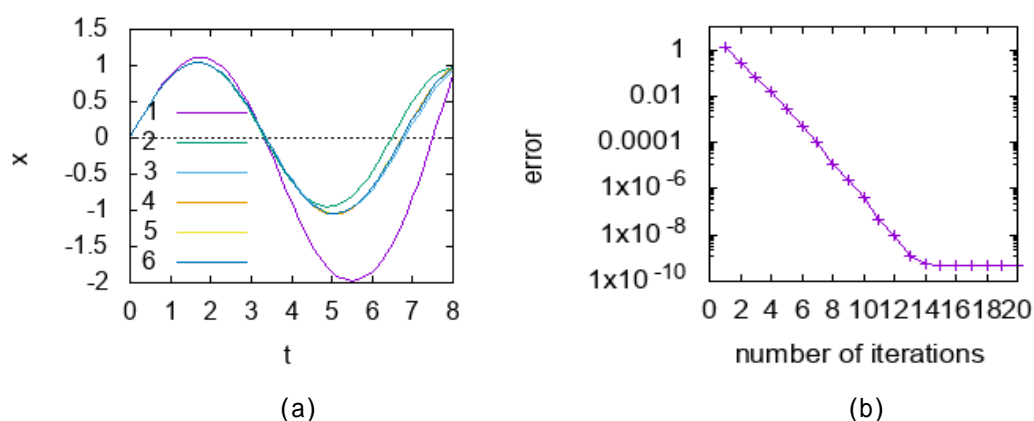


図1：常微分方程式初期値問題(1)に対する本研究の解法による(a)逐次近似解のグラフ(数字は反復回数を表す)、および、(b)逐次近似解の誤差の減衰の様子。

2023 年度

1. (代用電荷法) 代用電荷法はポテンシャル問題に対する数値解法のひとつであり、理論面で複素関数論と密接に関係する。本研究では二重周期ポテンシャル問題に対する代用電荷法を考案し、「国際会議ICMC2024」にて口頭発表した。

2. なお、当初の研究課題である佐藤超函数論に基づく数値解析の研究としては、佐藤超函数

論に基づく常微分方程式の数値解法を「日本応用数学会研究部会連合発表会」にて口頭発表した。

5. 主な発表論文等

1. 著者名 緒方 秀教	4. 巻 32
2. 論文標題 IMT型DE変換と周期関数に対するSinc近似を用いた数値不定積分	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 日本応用数学会論文誌	6. 最初と最後の頁 1-19
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.11540/jsiamt5.32.1_1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている	国際共著 無

1. 著者名 緒方 秀教	4. 巻 33
2. 論文標題 IMT-DE型数値不定積分を用いた常微分方程式初期値問題の数値解法	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 日本応用数学会論文誌	6. 最初と最後の頁 36-65
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.11540/jsiamt5.33.2_36	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている	国際共著 無

1. 著者名 緒方 秀教	4. 巻 32
2. 論文標題 佐藤超函数論に基づく関数近似, 数値微分および数値不定積分	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 日本応用数学会論文誌	6. 最初と最後の頁 101-122
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.11540/jsiamt5.32.3_101	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている	国際共著 無

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 緒方秀教	4. 巻 32
2. 論文標題 佐藤超函数論に基づく関数近似, 数値微分および数値不定積分	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 日本応用数学会論文誌	6. 最初と最後の頁 101-122
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.11540/jsiamt.32.3_101	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また, その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 緒方秀教	4. 巻 33
2. 論文標題 IMT-DE型数値不定積分を用いた常微分方程式初期値問題の数値解法	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 日本応用数学会論文誌	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない, 又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 緒方秀教	4. 巻 32
2. 論文標題 IMT型DE変換と周期関数に対するSinc近似を用いた数値不定積分	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 日本応用数学会論文誌	6. 最初と最後の頁 1-19
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.11540/jsiamt.32.1_1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また, その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計11件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 3件）

1. 発表者名 Hidenori Ogata
2. 発表標題 Numerical solver of ordinary differential equations based on IMT-DE variable transformation
3. 学会等名 ICIAM 2023 Tokyo (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Hidenori Ogata
2. 発表標題 Numerical solver of ordinary differential equations based on the IMT-DE transformation
3. 学会等名 ICIAM 2023 (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Hidenori Ogata
2. 発表標題 Method of fundamental solutions for doubly periodic problems
3. 学会等名 ICMC 2024 (国際学会)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 森口麟太郎, 緒方秀教
2. 発表標題 IMT-DE変換による常微分方程式初期値問題の直接数値解法
3. 学会等名 日本応用数理学会第20回研究部会連合発表会
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 緒方秀教
2. 発表標題 佐藤超函数論に基づく数値不定積分と常微分方程式への応用
3. 学会等名 日本応用数理学会第20回研究部会連合発表会
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 緒方秀教
2. 発表標題 IMT型変数変換を用いた常微分方程式初期値問題の数値解法
3. 学会等名 日本応用数理学会2022年度年会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 緒方秀教, 山本有作
2. 発表標題 量子力学固有値問題の数値不定積分による数値解法
3. 学会等名 日本応用数理学会2022年度年会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 緒方秀教
2. 発表標題 代用電荷法不変スキームの等角写像不変性について
3. 学会等名 日本応用数理学会第19回研究部会連合発表会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 緒方秀教
2. 発表標題 佐藤超函数論に基づく無限区間上での関数近似, 数値微分および数値不定積分
3. 学会等名 日本応用数理学会2021年度年会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 緒方秀教
2. 発表標題 IMT型変換と周期的Sinc近似による数値不定積分
3. 学会等名 日本応用数理学会2021年度年会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 緒方秀教
2. 発表標題 IMT型変数変換を用いたVolterra積分方程式の数値解法
3. 学会等名 日本応用数理学会研究部会連合発表会
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 緒方秀教	4. 発行年 2022年
2. 出版社 サイエンス社	5. 総ページ数 200
3. 書名 ガイダンス微分方程式	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関