様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６ 年　 ６ 月 １９ 日現在

機関番号：３２６６０
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2021～2023
課題番号：２１Ｋ１１７６０

研究課題名（和文）乱択アルゴリズム、近似アルゴリズムを利用した数値数式融合計算の研究

研究課題名（英文）On the Study of Symbolic-Numeric Computation Using Randomized and/or Approximation Algorithms

研究代表者

関川　浩（Sekigawa, Hiroshi）

東京理科大学・理学部第一部応用数学科・教授

研究者番号：００３９６１７８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,700,000円

研究成果の概要（和文）：信頼性の高い数式処理と効率がよく柔軟な数値計算双方の長所を合わせ持つ計算方法である数値数式融合計算において、近似アルゴリズムを利用した効率的な計算法に関する研究を行った。主な成果は、多項式の近似的な合成を求めるアルゴリズムと、それを利用した多項式の値の評価法である。そのほか、与えられたいくつかのメビウス変換の線形結合に対し、同じメビウス変換の凸結合で元の線形結合にもっとも近いものを求めるアルゴリズム、母点が不明なボロノイ図から母点を求めるアルゴリズムについて成果を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義
計算機により数学的な計算を行う代表的な方法には数値計算と数式処理の二つがあり、この二つの方法は長所、短所が相補的である。そこで、数式処理に数値計算の手法や考え方をうまく利用し、数式処理と数値計算の長所を合わせもつ数値数式融合計算という計算方法が研究されている。本研究の成果は数値数式融合計算の効率化、新しい利用法であり、様々な分野における数学的な計算への利用が期待できる。

研究成果の概要（英文）：Symbolic-numeric computation is a computing methodology that has high reliability of symbolic computation, and efficiency and flexibility of numeric computation. We carried out research on efficient symbolic-numeric computation utilizing approximation algorithms. Our main results are algorithms computing approximate decomposition of polynomials and their application for polynomial evaluation. Some other results include an algorithm to compute the nearest convex combination of Moebius transformations for a given linear combination of them and an algorithm to find the sites of a given Vonoroi diagram whose sites are unknown.

研究分野：数値数式融合計算

キーワード：数値数式融合計算　近似アルゴリズム　多項式の合成　メビウス変換　凸結合　ボロノイ図

様　式　C－１９、F－１９－１（共通）

１．研究開始当初の背景

計算機により数学的な計算を行う代表的な方法には数値計算と数式処理がある。数値計算の典型例は方程式を解く Newton 法で、適当な初期値からスタートして近似計算を用い、反復計算により近似解の精度を上げて行く。数式処理の典型例は二つの多項式の最大公約多項式を求める Euclid の互除法で、誤差のない正確な計算を用い、有限ステップで終了する計算を行う。表 1 に両計算法の比較を示す。ここで「柔軟性」とは、入力データ（多項式の係数など）に誤差があっても計算可能なことを示す。表１から分かるとおり、数値計算と数式処理は、お互い、長所短所が相補的になっている。

表１：数値計算と数式処理の比較

計算方式	速度	メモリ	信頼性	柔軟性
数値計算	高	少	別途保証が必要	高
数式処理	低	多	高	低

現在、科学技術計算には数値計算を主に用いる。その理由は以下の二つである。

(i)　数式処理はアルゴリズム中で正確な計算を用いるため計算量が多いこと。

(ii)　数式処理のアルゴリズム中に等号判定による条件分岐が存在するため、誤差を含むデータが入力された場合、出力が真の値から掛け離れたものになる恐れがあること。

数値数式融合計算は、上記(i)、(ii) を解決するための計算法であり、数式処理の信頼性を保ったまま、(i) に対しては、数値計算を援用することにより効率的な計算法を、(ii) に対しては、係に誤差のある多項式など、今までの数式処理では扱えなかった入力でも計算可能な、数値計算のような柔軟性を持つ計算法を提供することを目指すものである。以下、(i) の解決を目指すものを効率的な数値数式融合計算、(ii) の解決を目指すものを柔軟な数値数式融合計算と呼ぶ。

ここ 20 年程で柔軟な数値数式融合計算の研究にはかなりの進展があったが、まだまだ計算量は多く、応用を考えると計算量の一層の削減が必要である。

２．研究の目的

まず、問題の安定性、不安定性について説明する（これは問題そのものの性質で、アルゴリズムとは独立な概念である)。問題が安定とは、入力データの摂動に対して出力が連続的に変化する状態をいう。たとえば、実係数 1 次方程式 ax=b (a≠0)を解く問題は、解 b/a が a、b に関して連続だから安定である。一方、問題が不安定とは、入力データの摂動に対して出力が不連続に変化する状態をいう。たとえば、2 次方程式 x^2-2x+1=0 の実根の数を求める問題は、この方程式の判別式が 0 だから、係数がわずかに変化しただけで実根の数が変わってしまうため不安定である。よって、係数に誤差がある場合、確定した一つの出力を与えることができない。

しかし、不安定な場合でも問題に関する有益な情報が得られ、出力が確定する新しい問題を設定可能である。たとえば、f(x)を実係数多項式として方程式 f(x)=0 の実根の総数を求める問題を考えよう。多項式 f の係数が正確と仮定すれば「f に一番近い多項式 g で方程式　g(x)=0 の実根が m 個となるものを求めよ」という問題は入力データに誤差がなく、解が確定する（f と g の間の距離は g―f の係数を並べたベクル（係数ベクトル）の適当なノルムで測るものとする)。このように、着目している性質（上の例では、実根の総数が m 個）を満たし、元の対象（上の例では、多項式 f）に一番近い対象を求める問題のことを最近接問題と呼ぶことにする。最近接問題を解くことにより、元の問題に関する有益な情報が得られる。たとえば、上記の例では、f の係数の誤差範囲が既知のとき、最近接問題の解を g として、f と g の間の距離と誤差を比較、後者の方が小さければ、f(x)=0 の実根が m 個となる可能性がない、と断言できる。

一方、問題が安定な場合、解が連続的に変化する誤差限界を求める問題は応用上も重要である。たとえば、f(x)を実係数多項式とし、f の係数が正確と仮定すると方程式 f(x)=0 が実根を持たないとする。この場合、「f(x)=0 が実根を持たないことを確認せよ」という問題は安定である（一変数代数方程式の根は係数に関して連続に動くから)。しかし、f の係数が誤差を含む場合は数値的に求めた根の誤差解析をするか、「f(x)=0 が実根を持たない誤差限界」が必要である。後者は「g(x)=0 が実根を持つような f に一番近い多項式 g」を求める最近接問題を解けばよい。

このように、着目している性質に合わせて数式処理で扱える最近接問題を設定すれば有益な情報が得られるが、最近接問題をそのまま数式処理アルゴリズムで計算しようとすると計算量の問題が生じる。計算量削減のためには、まず、数学のレベルで問題を簡単化し、次いで、効率のよいアルゴリズムを適用する、という手順になる。前者については、たとえば、多項式 f について、方程式 f(x)=0 の根が複素平面上の領域 D にはないとして「f にできるだけ近い多項式 g で、方程式 g(x)=0 の根が D に属するものを求めたい」という場合、根は D の境界にある場合のみ考えればよい、といったことである。後者については、効率的な数値数式融合計算を利用することも考えられるが、乱択アルゴリズムや近似アルゴリズムを用いて、より一層の効率化を図ろうとするのが本研究の目的である。

３．研究の方法

研究の目的を達成するために以下の三つの課題を設定した。

【課題１】最近接問題に対する従来の数値数式融合計算アルゴリズムの構築とその解析。
【課題２】乱択アルゴリズムや近似アルゴリズムを用いた数値数式融合計算アルゴリズムの構築とその解析。
【課題３】最近接問題の解についての理論的な解析。

本研究は、最近接問題に対して従来の数値数式融合計算アルゴリズムを構築した上で（課題１）、乱択アルゴリズムや近似アルゴリズムを利用して効率を上げることを目指しているので（課題２）、得られた解がどの程度、最適解に近いのか評価が必要なため課題３を設定した。具体的な対象は、多項式や代数方程式の問題を中心とする代数的なものを主とし、さらに幾何的な問題も扱うこととした。

４．研究成果

研究成果を４項目に分けて記述する。

(1) 多項式の合成

１変数多項式 f(x)を f=g(h(x))と二つの１変数多項式の合成で表現可能か否かを判定し、可能な場合に g、h を求める問題は基本的かつ重要な問題であるが、因数分解と比べると研究はそれほど多くはない。多項式 f(x)が合成で表現できる場合、たとえば x に具体的な値を代入したときの f の値を評価する際に計算量が削減できる場合があるなど、いろいろよい性質があるが、残念ながら因数分解の場合とは異なり、多項式が合成で表現できることはまれである。しかし、f そのものではなくても、f ’=g(h)と合成で表現可能な f ’であって、f-f ’の項数が少ないものがあれば、f=g(h)+(f−f ’)と変形することにより、f の評価の計算量が削減できる可能性がある。これは f に対して合成で表現可能な多項式を求めるという最近接問題ととらえられる。しかも、真に一番近い多項式でなくても値の効率的な評価に利用し得るという点で、研究開始時点では想定していなかった、最近接問題の新しい利用法ともいえる。このことから研究期間中、この問題を中心として取り組むこととなった。具体的な成果は以下のとおり。

- 多項式の合成に関する最近接問題で連続的な場合と離散的な場合に共通な近似アルゴリズムの構築（雑誌論文２、３，４番目、学会発表１、４、６、７、８番目)。
- 多変数多項式への結果の拡張（学会発表９、11 番目)。

(2) メビウス変換の凸結合

メビウス変換の凸結合について、係数に誤差があるため凸結合ではなくなった場合の最近接問題に対し数値数式融合計算のアルゴリズムを構築した（学会発表５番目)。

(3) ボロノイ図

与えられた平面分割図形に近いボロノイ図を求める近似アルゴリズム（課題２）を考察する前段階として、母点が不明なマンハッタン距離によるボロノイ図から母点を求める問題に対しアルゴリズムを提案した（雑誌論文１番目、学会発表２、３番目)。

(4) 数値数式融合計算

新たな研究成果ではないが、日本数学会の年会の特別招待講演の機会があったので、数値数式融合計算全般について、問題意識、代表的な問題とその取り扱い方について講演を行った（学会発表 10 番目)。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計4件（うち査読付論文　1件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　1件）

１．著者名 山中悠輔、武田渉、関川浩	４．巻 2255
２．論文標題 マンハッタン距離ボロノイ図からの母点探索	５．発行年 2023年
３．雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	６．最初と最後の頁 174～183
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 Sekigawa Hiroshi	４．巻 57
２．論文標題 An Approximation Algorithm for the Nearest Decomposable Polynomial in the Hamming Distance	５．発行年 2023年
３．雑誌名 ACM Communications in Computer Algebra	６．最初と最後の頁 119～122
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1145/3637529.3637532	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 関川浩	４．巻 30
２．論文標題 合成で表現可能な最近接多項式を求める近似アルゴリズム	５．発行年 2024年
３．雑誌名 数式処理	６．最初と最後の頁 53～56
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 関川浩	４．巻 29
２．論文標題 合成で表現可能な最近接多項式	５．発行年 2023年
３．雑誌名 数式処理	６．最初と最後の頁 37～40
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計11件（うち招待講演　2件／うち国際学会　2件）

1．発表者名 関川浩
2．発表標題 合成で表現可能な最近接多項式
3．学会等名 第31回日本数式処理学会大会
4．発表年 2022年

1．発表者名 山中悠輔、武田渉、関川浩
2．発表標題 マンハッタン距離ボロノイ図の母点探索
3．学会等名 日本応用数理学会2022年度年会
4．発表年 2022年

1．発表者名 山中悠輔、武田渉、関川浩
2．発表標題 マンハッタン距離ボロノイ図からの母点探索
3．学会等名 RIMS 共同研究（公開型）Computer Algebra―Foundations and Applications
4．発表年 2022年

1．発表者名 関川浩
2．発表標題 多項式の合成による表現
3．学会等名 Risa/Asir Conference 2023
4．発表年 2023年

1．発表者名
Hiroshi Sekigawa

2．発表標題
The nearest function represented by a convex combination of given functions with constraints

3．学会等名
26th Conference on Applications of Computer Algebra (ACA2021)（招待講演）（国際学会）

4．発表年
2021年

1．発表者名
関川浩

2．発表標題
有限体上の多項式のdecomposition

3．学会等名
Risa/Asir Conference 2022

4．発表年
2022年

1．発表者名
関川浩

2．発表標題
合成で表現可能な最近接多項式を求める近似アルゴリズム

3．学会等名
第32回日本数式処理学会大会

4．発表年
2023年

1．発表者名
Hiroshi Sekigawa

2．発表標題
An approximation algorithm for the nearest decomposable polynomial in the Hamming distance

3．学会等名
48th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC2023)（国際学会）

4．発表年
2023年

1．発表者名 徳田陸成、武田渉、関川浩
2．発表標題 因数分解を利用した多変数多項式のdecomposition
3．学会等名 RIMS 共同研究（公開型）Computer Algebra―Foundations and Applications
4．発表年 2023年

1．発表者名 関川浩
2．発表標題 数値数式融合計算
3．学会等名 日本数学会2024年度年会（招待講演）
4．発表年 2024年

1．発表者名 徳田陸成、武田渉、関川浩
2．発表標題 二変数多項式の近似decompositionとその応用
3．学会等名 Risa/Asir Conference 2024
4．発表年 2024年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関