

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 6 年 6 月 3 日現在

機関番号：22604
研究種目：基盤研究(C) (一般)
研究期間：2021～2023
課題番号：21K11770
研究課題名(和文) ランダムウォーク型マルコフ連鎖の定常分布計算：安定性のトリニティの解明を通して

研究課題名(英文) The computation of the stationary distribution in random-walk-type Markov chains: via unraveling the trinity of stability

研究代表者
増山 博之 (Masuyama, Hiroyuki)

東京都立大学・経営学研究科・教授

研究者番号：60378833
交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：ランダム・ウォーク(RW)型マルコフ連鎖における「安定性のトリニティ」、すなわち、安定性に関わる3つの要素「増分平衡分布の裾減衰率」「エルゴード収束率」「定常分布の裾減衰率」の関係性に注目しつつ、代表的なRW型マルコフ連鎖であるM/G/1型マルコフ連鎖、GI/G/1型マルコフ連鎖、Upper Block-Hessenberg型マルコフ連鎖を主たる対象として、「最終列ブロック増大切断近似」および「レベル増分切断近似」に関する収束公式、計算可能な誤差上界式の導出、ならびに、準アルゴリズム的解構築法(有限手続きの反復により厳密解に収束する近似解列を構築する方法)の確立などを行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究は、ランダム・ウォーク(RW)型マルコフ連鎖の安定性に関する新たな視点、「安定性のトリニティ」に注目し、増分平衡分布の裾減衰率、エルゴード収束率、定常分布の裾減衰率という3つの要素の関係性についての知見の活用と深化に取り組んだ。これら3つの要素は、RW型マルコフ連鎖の切断近似の精度と深く関連している。本研究の成果により、RW型マルコフ連鎖の安定性と切断近似の誤差評価についての理論的な理解が深まるとともに、その応用として、待ち行列システムやネットワークの性能評価、リスク評価などの問題に対するより精度の高い解析・数値計算手法の提供につながると期待される。

研究成果の概要(英文)：We have derived several convergence formulas for the last-column block-augmented truncation approximation and the level-increment truncation approximation, as well as computable error upper bounds. We have also developed a quasi-algorithmic solution construction method (a method for generating a sequence of approximate solutions that converge to an exact solution by iterating finite procedures). These have been carried out for M/G/1-type, GI/G/1-type, and upper Block-Hessenberg Markov chains (which are representative random-walk-type Markov chains), considering the "Trinity of Stability" in random-walk-type Markov chains. Note that the "Trinity of Stability" is the relationship between the three factors related to stability: (i) the tail decay rate of the equilibrium distribution of increments; (ii) the ergodic convergence rate, (iii) the tail decay rate of the stationary distribution.

研究分野：応用確率論

キーワード：ランダム・ウォーク型マルコフ連鎖 定常分布 安定性 上部ヘッセンベルグ型マルコフ連鎖 GI/G/1型マルコフ連鎖 M/G/1型マルコフ連鎖

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

四半世紀ほど前から、再呼のあるコールセンタや、廃棄が発生する在庫システムといった状態依存型待ち行列システムの性能評価が、ランダム・ウォーク(RW)型マルコフ連鎖を用いたマルコフ解析によって行われている。RW型マルコフ連鎖は、現在の状態を添え字とする増分分布列が Tight となるマルコフ連鎖である。代表的な RW 型マルコフ連鎖には、GI/G/1 型マルコフ連鎖(特別な場合として、M/G/1 型マルコフ連鎖を含む)や Upper Block-Hessenberg (UBH)型マルコフ連鎖などがあり、これらは待ち行列の解析に頻出する確率モデルである(厳密には、RW 型ではない UBH 型マルコフ連鎖も存在する)。

代表的な RW 型マルコフ連鎖である GI/G/1 型および UBH 型マルコフ連鎖の定常分布は、「レベル増分切断近似」あるいは「最終列ブロック増大切断近似」によって計算が可能である。レベル増分切断近似は、RW 型マルコフ連鎖との相性がよく、計算効率が高いが、誤差評価の報告はない。一方、最終列ブロック増大切断近似は汎用的な切断近似であり、その誤差評価については、応募者がほぼ独占的に研究成果を上げている。

また、UBH 型マルコフ連鎖の定常分布については、研究代表者本人によって、行列無限積形式解に基づく逐次更新アルゴリズムが提案されている(Masuyama, QUESTA, 2019)。この逐次更新アルゴリズムは、変数が漸増するものの、求解が比較的容易な線形分数計画問題列を逐次的に解くことで定常分布に収束する近似分布列を生成するものである。そのため、当該アルゴリズムは、最初から近似計算を目的とする既存アルゴリズムとは、設計思想が全く異なる。

2. 研究の目的

本研究の目的は、代表的な RW 型マルコフ連鎖である GI/G/1 型や UBH 型マルコフ連鎖を対象に、定常分布に対する効率的で高精度な数値計算法を確立することである。この目的を達成するために、次の2つの目標を設定した。1つ目は、RW 型マルコフ連鎖の定常分布計算において一般的に用いられる「レベル増分切断近似」と「最終列ブロック増大切断近似」に対する誤差収束公式および誤差上界式を導出することである。2つ目は、RW 型マルコフ連鎖の定常分布に対する計算アルゴリズムの性能を向上させることである。これらの目標を達成するための基礎として、本研究では、RW 型マルコフ連鎖の安定性に深く関わる3つの量、「増分平衡分布の裾減衰率」「エルゴード収束率」「定常裾減衰率」の間に存在する強固な関係性である「安定性のトリニティ」についての知見の活用と深化に取り組む。これにより、定常分布を精度よく計算するための理論的基盤を強化し、待ち行列モデルへの適用可能性を高める。さらに、具体的な応用例として、セミ・マルコフ型待ち行列モデルにおける系内客数分布や呼損率の漸近公式を導き、その有効性を検証することで、理論と応用の両面から研究成果を評価する。

3. 研究の方法

まず、UBH 型マルコフ連鎖の定常分布を効率的に計算するために、新しい行列無限積形式解の構築法を理論的に確立する。この手法は、従来の Foster-Lyapunov ドリフト条件と収束条件に依存せず、「準アルゴリズム的構成可能性」を持つものである。次に、有限レベル M/G/1 型マルコフ連鎖に対する劣幾何収束公式を導出するため、M/G/1 型マルコフ連鎖における「安定性のトリニティ」についての知見を活用すると共に、偏差行列が満たすポアソン方程式の新たな解である「基本偏差行列」を導入する。これにより、有限レベル連鎖と無限レベル連鎖のそれぞれの定常分布間の差分式を導き、その差分の収束速度を評価する。同様のアプローチによって、M/G/1 型マルコフ連鎖の定常分布に対するレベル増分切断近似の収束公式の導出に取り組む。また、可

能であれば、M/G/1 型マルコフ連鎖に対して得られた結果を基に、より一般的な GI/G/1 型マルコフ連鎖への拡張も行う。

4. 研究成果

以下、本研究課題に係る研究成果のうち、特に査読付き英文誌に掲載されたものについて、その概要を述べる。紙幅の制約により技術的な詳細には触れないが、各研究成果では「安定性のトリニティ」に関する知見を活用している。例えば、劣指数的な「増分平衡分布」と「定常分布」それぞれの裾減衰の等速性である。他にも、「増分分布の裾減衰率」と、「基本偏差行列の絶対上界の精度」および「Foster-Lyapunov 型ドリフト条件の Lyapunov 関数の増加率」との間にある密接な関連性などがある。

(1) UBH 型マルコフ連鎖の定常分布に対する準アルゴリズム的解構築法の開発

本研究の主結果は、UBH 型マルコフ連鎖の定常分布に対する行列無限積形式解の新たな構築法を確立したことである。従来の行列無限積形式解(Masuyama, QUESTA, 2019)は、Foster-Lyapunov 型ドリフト条件と収束条件の両方を満たす特定のパラメータセットを必要としていた。これに対し、新しい行列無限積形式解は、そのようなパラメータセットや付加的な条件を必要とせず、「準アルゴリズム的構成可能性」を有している。準アルゴリズム的構成可能性とは、求めたい対象が、有限の複雑さを持つ再帰的手続きを無限に繰り返すことで構成される性質を指す。この性質は、一般的な UBH 型マルコフ連鎖の定常分布に対する他の既存の解法には見られないものである。

(2) atUBH 型マルコフ連鎖の定常分布ベクトルに対する劣指数的漸近解析

本研究の目的は、離散時間 atUBH (Asymptotically block-Toeplitz and Upper Block-Hessenberg)型マルコフ連鎖の定常分布ベクトルに対する劣指数的漸近解析である。atUBH 型マルコフ連鎖は、M/G/1 型マルコフ連鎖を一般化したものであり、典型的には、例えば、セミ・マルコフ型の再試行待ち行列から生じる。本研究の主結果は、まず、定常分布ベクトルに対する劣指数的および局所劣指数的漸近公式を導出したことである。さらに、局所劣指数的漸近公式を、一様化と時間スケール変換のテクニックを駆使して、連続時間 atUBH 型マルコフ連鎖へと拡張した。この拡張により、局所劣指数的漸近公式の適用範囲が拡大した。

(3) 有限レベル M/G/1 型マルコフ連鎖の劣幾何収束公式の導出

本研究の主要な結果は、有限レベル M/G/1 型マルコフ連鎖の上限レベルを無限に大きくする極限を取った場合の定常分布に関する劣幾何収束公式を示したことである。なお、有限レベル M/G/1 型マルコフ連鎖は、通常の(無限レベル)M/G/1 型マルコフ連鎖についての最終列ブロック増大切断近似と見なすことが可能である。有限レベル M/G/1 型マルコフ連鎖において、上限レベルを無限に大きくするという漸近解析を行うために、マルコフ連鎖に付随する偏差行列が満たすポアソン方程式の解の中で、ブロック分解に適したものとして「基本偏差行列」という概念を導入した。基本偏差行列は、有限レベル連鎖と対応する無限レベル連鎖のそれぞれの定常分布の差分に関する「扱いやすい表現式」を提供し、その差分表現式は、本研究の主要な結果である「定常分布の劣幾何収束公式」の導出において重要な役割を果たす。また、導いた劣幾何収束公式の代表的な応用例として、MAP/GI/1/N 待ち行列における呼損率の漸近公式も導出した。

(4) M/G/1 型マルコフ連鎖の定常分布に対するレベル増分切断近似の収束公式の導出

本研究の目的は、M/G/1 型マルコフ連鎖のレベル増分切断近似において、レベル増分の切断点を無限に大きくしたときの収束公式を導くことである。レベル増分切断近似は、M/G/1 型マルコフ連鎖の定常分布を、Ramaswami の再帰式を用いて計算する際に一般的に利用される。主な研究

成果としては、まず、レベル増分分布が light-tailed であるという仮定の下で、定常分布に対するレベル増分切断近似のレベル毎誤差に関する幾何収束公式を導出した。次に、レベル増分平衡分布が long-tailed であるという仮定の下で、レベル増分平衡分布の裾減衰速度が、レベル増分切断近似のレベル毎誤差の収束速度と同等であることを示した。さらに、レベル増分切断近似の全変動誤差に関する劣幾何収束公式も示した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Hiroyuki Masuyama, Yosuke Katsumata, and Tatsuaki Kimura	4. 巻 56
2. 論文標題 A subgeometric convergence formula for finite-level M/G/1-type Markov chains: via a block-decomposition-friendly solution to the Poisson equation of the deviation matrix	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Advances in Applied Probability	6. 最初と最後の頁 389 ~ 429
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/apr.2023.39	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Katsuhisa Ouchi and Hiroyuki Masuyama	4. 巻 66
2. 論文標題 A subgeometric convergence formula for total-variation error of the level-increment truncation approximation of M/G/1-type Markov chains	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of the Operations Research Society of Japan	6. 最初と最後の頁 243 ~ 256
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.15807/jorsj.66.243	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Katsuhisa Ouchi and Hiroyuki Masuyama	4. 巻 51
2. 論文標題 A geometric convergence formula for the level-increment-truncation approximation of M/G/1-type Markov chains	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Operations Research Letters	6. 最初と最後の頁 364 ~ 369
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.orl.2023.04.005	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hiroyuki Masuyama	4. 巻 55
2. 論文標題 A new matrix-infinite-product-form solution for upper block-Hessenberg Markov chains and its quasi-algorithmic constructibility	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Advances in Applied Probability	6. 最初と最後の頁 1 ~ 28
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/apr.2022.9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Katsuhisa Ouchi and Hiroyuki Masuyama	4. 巻 65
2. 論文標題 `Level-wise subgeometric convergence of the level-increment truncation approximation of M/G/1-type Markov chains	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of the Operations Research Society of Japan	6. 最初と最後の頁 198 ~ 215
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.15807/jorsj.65.198	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hiroyuki Masuyama	4. 巻 102
2. 論文標題 Subexponential asymptotics of asymptotically block-Toeplitz and upper block-Hessenberg Markov chains	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Queueing Systems	6. 最初と最後の頁 175 ~ 217
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11134-022-09857-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計2件 (うち招待講演 0件 / うち国際学会 0件)

1. 発表者名 増山 博之
2. 発表標題 上部ブロック・ヘッセンベルグ型マルコフ連鎖に対する新しい行列無限積形式解とその準アルゴリズム的構築可能性
3. 学会等名 日本オペレーションズ・リサーチ学会 待ち行列研究部会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Katsuhisa Ouchi and Hiroyuki Masuyama
2. 発表標題 An error bound for the level-increment truncation approximation of M/G/1-type Markov chains
3. 学会等名 2021年度待ち行列シンポジウム「確率モデルとその応用」
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Hiroyuki Masuyama: List of Publications
<https://www.comp.tmu.ac.jp/masuyama/publications.html>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------