

令和 6 年 5 月 28 日現在

機関番号：55502

研究種目：若手研究

研究期間：2021～2023

課題番号：21K13767

研究課題名（和文）Weakly Arf環論の展開

研究課題名（英文）Study of weakly Arf rings

研究代表者

磯部 遼太郎（Isobe, Ryotaro）

大島商船高等専門学校・一般科目・助教

研究者番号：50897882

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,000,000円

研究成果の概要（和文）：Weakly Arf環は、1次元におけるArf環の理論を一般の可換環上で展開するために、Arf環の条件を弱めることで導入された環構造である。Arf環は、その環構造や特徴付けから、1次元の整閉環に準ずる良い構造を持つことが知られているが、weakly Arf環も同様の性質があることが期待される。本研究課題では、主にArf環やweakly Arf環のイデアルや加群の構造解析に従事した。Arf環内の整閉イデアルの構造決定、Arf環上の反射的加群の構造決定、更には一般次元のweakly Arf closureやstrict closureの構成方法の確立などの成果を挙げている。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究の目的は、weakly Arf環の構造解析を通して「整閉環に準ずる環構造とは如何なる存在であるか」を考察し、その構造を明らかにすることである。整閉環論と並行する新たな非整閉環の環構造論を確立することは、可換環論のみならず、整閉環論と親和性の高い代数幾何学・表現論・不変式論・組合せ論といった周辺分野の発展にも大きく貢献することが期待される。

本研究ではArf環やweakly Arf環、環のstrict closureに関する基礎的な構造を明らかにし、weakly Arf環論の基盤を構成している。新たな非整閉環論の原型を確立したことは、当該分野の発展に貢献したと考えられる。

研究成果の概要（英文）：The notion of weakly Arf rings was introduced by weakening the defining conditions of Arf rings, to extend the theory of Arf rings over arbitrary commutative rings. It is known that Arf rings have some good structure next to integrally closed rings from their definition and characterization. Therefore, it is expected that weakly Arf rings also have similar properties. In this research project, we have been engaged in analyzing the structure of ideals and modules over weakly Arf rings. We determined the structure of integrally closed ideals in Arf rings, the structure of reflexive modules over Arf rings, and provided a specific method for constructing weakly Arf closure and strict closure of rings.

研究分野：可換環論

キーワード：Cohen-Macaulay環 Arf環 Weakly Arf環 Strictly closed環 整閉イデアル 反射的加群

## 1. 研究開始当初の背景

本研究の主題は可換環論である。可換環論は、数や函数の集合のように、加減乗除の四則のうち加減乗を自由に行うことができる「世界」の構造を、主にこれら3つの演算を手掛かりに統一的理解・解明しようとする抽象代数学の一種である。歴史的には、19世紀末にD. Hilbertによる不変式の研究を通して創始され、E. Noetherによる代数学の抽象化の中で独立した分野として確立した。その発端から様々な代数系と繋がりがあり、20世紀半ば、J.-P. Serreが正則局所環を大域次元の有限性で特徴付けるという革命的成果を挙げて以降、homology代数学を手法として飛躍的な発展を遂げた。その後、可換環論は、主に代数幾何学との深い関わりの中、特異点論・整数論・不変式論・複素解析的多様体論・組合せ論などから問題と手法を獲得しつつ、環と加群のCohen-Macaulay性解析を中心に発展・整備されている。現在では加群圏の分類など表現論を含めて、代数学諸分野における共通言語の1つとなっている。現代可換環論の研究分野は多岐に渡るが、本研究は、可換環論の中でも最重要の研究対象であるCohen-Macaulay環の内部構造解析を、weakly Arf環論を用いて深化・発展させることを目標とした。

Cohen-Macaulay環は、代数幾何学・組合せ論・表現論においてもしばしば出現する環構造であり、豊富な具体例が存在する。その中でも、整閉なCohen-Macaulay環は際立って良い構造を持つが、それが故に稀な存在であり、圧倒的多数は非整閉環である。この事実を鑑みると、「整閉環に準ずる優れた環構造とはいかなる存在であるか」という問いは自然であり、その発見と解明はCohen-Macaulay環解析の発展にとって重要であると考えられる。申請者を含む7人が[CCCEGIM]で提示したweakly Arf環は、この要請に応え得る重要な候補の1つであると考えられる。

[CCCEGIM] E. Celikbas, O. Celikbas, C. Ciupercă, N. Endo, S. Goto, **R. Isobe**, and N. Matsuoka, *On the ubiquity of Arf rings*, Journal of Commutative Algebra, **15**, No. 2, 177-231, 2023

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、整閉環に準ずる優れた環構造としてweakly Arf環を提示し、非整閉なCohen-Macaulay環に対してweakly Arf環論を強力に展開することで、Cohen-Macaulay環解析に新たな展望をもたらすことである。申請者らが導入したweakly Arf環論の原点は、1971年にJ. Lipmanが導入したArf環論[L]にある。Arf環は1次元のCohen-Macaulay半局所環上に定義される環構造であり、正則環に準ずる優れた環構造を持つCohen-Macaulay環であると考えられることができるが、定義の条件の強さゆえに1次元のCohen-Macaulay環に対してしか定義できないという問題点があった。そこで、Arf環の定義の条件を弱めることで定義されたweakly Arf環を用いることで、1次元に限らない一般の可換環上で理論を展開する事ができ、かつ「整閉環に準ずる優れた環構造」という視点からArf環論を自然に高次元化することができる。一方、Cohen-Macaulay環解析は現在世界的に激しい競争下に行われており、組合せ論・不変式論・代数幾何学・表現論など、可換環論に限らない隣接する諸分野に対しても重要な課題となっている。中でもStanley-Reisner環・不変式環・blow-up代数の構造解析や、表現論におけるAuslander-Reiten予想の解決といった重要な課題は整閉環論と相性が良く、整閉環上では様々な成果が挙げられている。これらの状況を踏まえると、整閉環に準ずる構造を持つweakly Arf環の理論を深化・発展させることで、整閉環上の成果を非整閉環上まで拡張し、可換環論に限らない隣接する諸分野に対しても影響を与える非整閉環の理論を構築する事ができると考えられる。

[L] J. Lipman, *Stable ideals and Arf rings*, Amer. J. Math., **93**, 649-685, 1971

## 2. 研究の方法

[CCCEGIM]では、Arf環論を原点にweakly Arf環論を創始し、環のfiber積・不変式環・行列式環などの具体的な環のweakly Arf性解析を通して、weakly Arf環の基礎的かつ重要な性質を示している。局所化を通じたweakly Arf性の特徴付けや、弱い仮定の下で基礎環のweakly Arf性とその不変式環にも遺伝すること、更には環の(weakly) Arf性と環のstrict閉包に関するJ. Lipmanの予想の解決など、重要な結果が示されているが、Cohen-Macaulay環解析の視点から見ると未開拓のまま残されている課題も多い。本研究は、これらの未開拓部分を含めた課題の中から下記3つを選び、3年間で成果を挙げることを目指すものである。

課題 1 Strict 閉包の理論と Arf 環論の整備・発展

課題 2 整閉環論をモデルとした weakly Arf 環論の展開

課題 3 関連する諸分野への応用

2021 年度は課題 1 に従事し、その後 2, 3 の順に取り組む。以下、各課題の詳細を述べる。

課題 1: Weakly Arf 環論の基盤となる strict closure の理論と Arf 環論をさらに精査・発展させることを目的とする。課題 1 では、第一に「基礎環の環構造がいつ・どのくらい strict closure に遺伝するのか」という点について考察する。特に、「基礎環が 2 次元以上の Cohen-Macaulay 環の場合、いつ strict closure は Cohen-Macaulay となるのか」という問いの解明は、素朴ながらも喫緊の課題である。第二に、Arf 環の具体的な内部構造として、整閉イデアルの代数構造を解析する。1 次元の正則局所環(離散的付値環)内では、すべての(0)でないイデアルが極大イデアルの冪として書けるが、Arf 環内でも、整閉イデアルがそれに近い構造を持つと予想している。詳細を明らかにし、理論の構築を試みる。

課題 2: 整閉環論と並行した環構造論を weakly Arf 環上で展開することを目標とする。環の整閉性の観点から環構造解析を行う際、高さ 1 の素イデアルによる局所化の情報が重要になる。実際、イデアル類群などの整閉環上の理論は、局所化を経由して 1 次元の整閉環(離散的付値環)の性質を用いて展開される。[CCCEGIM]では、weakly Arf 環の特徴付けを整閉環と同様の形式で与えることで、整閉環論と並行した理論を weakly Arf 環上で展開できることを示唆している。課題 1 で取り組んだ strict closure と Arf 環の議論を基盤として、局所化を経由して一般次元の Cohen-Macaulay weakly Arf 環論の構築を目指す。具体的には、整閉環のイデアル類群の理論をモデルに、課題 1 の Arf 環の整閉イデアルに関する議論を高次元の weakly Arf 環へ拡張する計画である。

課題 3: 課題 2 までに展開した weakly Arf 環論を、可換環論と密接に関連する諸分野へ応用することを目標とする。本研究では、組合せ論・不変式論・代数幾何学における重要な研究対象である Stanley-Reisner 環・不変式環・blow-up 代数の構造解析と、表現論に関する未解決問題である Auslander-Reiten 予想の解決に力を入れる。Stanley-Reisner 環・不変式環・blow-up 代数については、整閉環論と相性が良く、整閉環上で盛んに研究が行われている。Weakly Arf 環論を用いて、非整閉環上でもこれらの代数構造を解析できる、整閉環上の理論を俯瞰するような理論の構築を試みる。Auslander-Reiten 予想は、一部の Cohen-Macaulay 整閉整域上で正しいことが知られている。本研究の応用として、非整閉環上での解決を目指す。

#### 4. 研究成果

2021 年度は、課題 1 の環の strict closure と Arf 環に関する成果を挙げた。環の strict closure は 1971 年に J. Lipman によって導入され、Arf 環との関係性が明らかにされていたが、その構成方法については 1 次元の場合であっても解析的不分岐の場合以外には発見されていなかった。また、既存の構成方法は抽象度が高く、実際に具体例を計算する上では非常に使いづらいものであった。本研究では、解析的不分岐の場合に限らず一般の 1 次元 Cohen-Macaulay 半局所環に対して、構成的な strict closure の構成方法を考案し、これまで計算不能であった環の strict closure を具体的に与えることに成功した。また、この構成方法を応用することで、strict closure が基礎環上有限生成となる条件を特徴付けている。2023 年度に本研究内容を再編し、「Construction and finite generation of the strict closure of rings」のタイトルで投稿した。本論文は 2024 年 9 月に Journal of Pure and Applied Algebra より出版される予定である。

2022 年度は課題 2 に着手し、一般次元における環の strict closure の有限生成性に関する成果を挙げた。前年度までの研究により、環の次元が 1 の場合には、strict closure の有限生成性は基礎環の完備化の冪零根基が 2 乗で消えることで特徴付けられることが判明していた。一般次元の場合には、strict closure が有限生成であるときは基礎環の冪零根基が 2 乗で消えることがわかっていたが、本年度の研究でその逆が部分的に成り立つことが判明した。この結果より、特に基礎環が優秀環であるときには、基礎環の冪零根基の条件で strict closure の有限生成性を特徴付けることができる。これは、よく知られている整閉包の有限生成性の特徴付けと並行する主張となっており、一般次元においても strict closure が整閉包に準ずる良い構造をもった拡大環であることを示している。

2023 度は、昨年度までに構成した strictly closed 環や Arf 環に関する理論を精査しつつ、高次元の理論の構築を試みた。具体的には、Arf 環上の reflexive 加群の構造に関して、神代真也氏との共同研究にて構築した理論の精査を行った。続いて、Arf 環および strictly closed 環に関する結果を高次元の weakly Arf 環上に拡張する試みを行った。高次元の weakly Arf 環上の reflexive 加群および reflexive なイデアルに関しては、局所化を経由することで、弱い条件の下で形式的な構造決定をする事ができた。より詳細な代数構造および加群圏の構造を明らかにし、関連分野に対する具体的な応用を見出すことが今後の課題である。高次元の理論はまだ初期段階であるが、2024 年度以降もこれらの研究を継続し、非整閉環論の更なる発展を試みる予定である。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Isobe Ryotaro	4. 巻 15
2. 論文標題 DECOMPOSITION OF INTEGRALLY CLOSED IDEALS IN ARF RINGS	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Commutative Algebra	6. 最初と最後の頁 335-344
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1216/jca.2023.15.335	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Celikbas Ela, Celikbas Olgur, Ciuperca Catalin, Endo Naoki, Goto Shiro, Isobe Ryotaro, Matsuoka Naoyuki	4. 巻 15
2. 論文標題 ON THE UBIQUITY OF ARF RINGS	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Commutative Algebra	6. 最初と最後の頁 177-231
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1216/jca.2023.15.177	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Endo Naoki, Goto Shiro, Isobe Ryotaro	4. 巻 8
2. 論文標題 Topics on strict closure of rings	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Research in the Mathematical Sciences	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s40687-021-00292-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Isobe Ryotaro	4. 巻 228
2. 論文標題 Construction and finite generation of the strict closure of rings	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Journal of Pure and Applied Algebra	6. 最初と最後の頁 107663 ~ 107663
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jpaa.2024.107663	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計4件(うち招待講演 0件/うち国際学会 0件)

1. 発表者名 Ryotaro Isobe
2. 発表標題 Study of $Z_2$ -graded rings
3. 学会等名 第27回代数学若手研究会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Ryotaro Isobe
2. 発表標題 Finite generatedness of strict closure $R^*$
3. 学会等名 東京可換環論セミナー
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Ryotaro Isobe
2. 発表標題 Reflexive modules over Arf rings
3. 学会等名 オンライン可換環論セミナー2021
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Ryotaro Isobe
2. 発表標題 Construction of strict closure of rings
3. 学会等名 第42回可換環論シンポジウム
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------