

令和 6 年 6 月 20 日現在

機関番号：51201

研究種目：若手研究

研究期間：2021～2023

課題番号：21K13809

研究課題名（和文）エントロピースペクトルの剛性問題とRuelleゼータ関数の表示

研究課題名（英文）Rigidity problem of entropy spectra and representaion of Ruelle zeta functions

研究代表者

中川 勝國（Nakagawa, Katsukuni）

一関工業高等専門学校・その他部局等・講師

研究者番号：00855455

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,000,000円

研究成果の概要（和文）：Gibbs測度のエントロピースペクトルから力学系を復元する問題、いわゆる剛性問題に対して、Ruelleゼータ関数族の零温度極限の考察を通じたアプローチにより解決を目指した。Gibbs測度がMarkov測度になっている場合には、復元可能であるための十分条件を与え、また測度論的同型の範囲での復元が、より強い位相的同型の範囲での復元と「ほとんど同じ」であることを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

剛性問題に対する先行研究では直接的な計算の陰に隠れていた零温度極限の考察によるアプローチに明確な形を与え、一般的な復元の流れを明らかにした。零温度極限の研究は南米を中心に盛んに行われているが、それをゼータ関数やマルチフラクタル解析と結びつける視点は他に類を見ず、発展が期待できる。

研究成果の概要（英文）：We approached the rigidity problem of entropy spectra of Gibbs measures via the analysis of the zero-temperature limit of the one-parameter families of the Ruelle zeta functions. When the Gibbs measure is Markov, we obtained a sufficient condition for which the dynamical system can be restored from its entropy spectrum. Moreover, we proved that, in almost all the cases, the measure-theoretic isomorphism can be extended to a topological conjugacy.

研究分野：エルゴード理論

キーワード：力学系のRuelleゼータ関数 Gibbs測度 エントロピースペクトル

## 1. 研究開始当初の背景

(1) 力学系上に不変確率測度が与えられた時、エントロピースペクトルは、不変確率測度の局所エントロピーに対するマルチフラクタルスペクトルとして定義される。エントロピースペクトルは、多くの力学系において、位相的エントロピーや測度論的エントロピー等の重要な不変量を、特殊値として実現する(⑧)。そのため、エントロピースペクトルから力学系を復元できるかを問う問題、すなわち、エントロピースペクトルの剛性問題は自然な問題であり、研究代表者以前には、⑥、⑦、⑨等の取り組みがあった。また、エントロピースペクトルとともに重要なマルチフラクタルスペクトルに次元スペクトルがある。次元スペクトルに対しても剛性問題を考えることができ、これについては研究代表者による①、②がある。①、②において、剛性問題に対して、零温度極限の考察によるアプローチが導入された。これは、スペクトルの位相的圧力による表現から得られる Ruelle ゼータ関数の 1-パラメータ族のパラメータ無限大の挙動から力学系の周期点の情報を引き出そうというものである。(パラメータは統計力学における逆温度に対応しているため、パラメータ無限大の状態は零温度極限と呼ばれる。)

(2) ⑥、⑦、⑨や①、②は、考察の対象を片側 Markov シフト上の Markov 測度に限定していた。Markov 測度は有限サイズの確率行列を使って表される有限次元の対象であり、このことは代数的な議論・直接的な計算を可能とする。しかし、零温度極限の考察によるアプローチの有効性は、有限次元に固有の議論・計算から切り離された、真に無限次元の対象に対して検証されるべきである。⑩で導入された、片側 Markov シフト上の super-continuous 関数の Gibbs 測度は、Markov 測度を含む最も自然な無限次元の対象である。研究代表者は、Markov 測度に対する議論を見直す過程で、跡公式と呼ばれる、測度に対応する転送作用素の固有値の総和と、エルゴード和によって与えられる Markov シフトの周期点上の重みの総和との関係式が、零温度極限の考察による議論で重要な役割を果たしていることに気づき、③において、super-continuous 関数の十分大きなクラスに対して、跡公式の成立を証明した。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、無限次元の対象である super-continuous 関数の Gibbs 測度に対して、零温度極限によるアプローチを展開し、エントロピースペクトルの剛性問題を解決することである。

## 3. 研究の方法

エントロピースペクトルの剛性問題の解決を次の 2 つのステップに分ける。

ステップ 1. スペクトルの位相的圧力による表現から自然に Ruelle ゼータ関数の実 1-パラメータ族が得られるが、まず、零温度極限の考察により、この 1-パラメータ族を復元する。このステップにおいて重要なのが、Ruelle ゼータ関数の多項式表示であり、すでに③で確立された跡公式を用いて多項式表示を確立する。

ステップ 2. Ruelle ゼータ関数の 1-パラメータ族から、周期点の情報を取り出すことで、力学系を復元する。

## 4. 研究成果

(1) 「研究の方法」でも述べたように、エントロピースペクトルの位相的圧力による表現から自然に Ruelle ゼータ関数の 1-パラメータ族が得られ、この 1-パラメータ族の零温度極限における挙動の解析が剛性問題解決の鍵となる。特に、零温度極限における挙動から、もとの 1-パラメータ族が復元できるかが大きな問題である。研究代表者は、④において、Markov 測度の場合に、この復元が可能になるための片側シフトに対する十分条件を与えた。

(2) エントロピースペクトルからの力学系の復元では、測度論的同型の範囲での復元を考えると自然であるが、これに関連して、測度論的同型と位相的同型にどの程度の差があるか、具体的には、Gibbs 測度間の測度論的同型が位相的同型に拡張できるための十分条件を与える問題が自然に生じる。研究代表者は、⑤において、Markov 測度の場合に 1 つの十分条件を与え、これを用いて、ほとんどすべての Markov 測度において測度論的同型と位相的同型には「差がない」こと、正確に述べると、ある片側 Markov シフト上の Markov 測度全体(自然に微分可能多様体になる)の中で、測度間の測度論的同型が力学系間の位相的同型に一意に拡張できるものが、補集合が Lebesgue 測度 0 の開集合を含むこと、を証明した。

研究期間全体を通じて、Markov 測度に対しては、上記 4 の (1)、(2) のアプローチによりエントロピースペクトルの剛性問題を満足すべき形で解決できたが、一般の super-continuous 関数の Gibbs 測度に対しては、時間的制約により残念ながら解決には至らなかった。このことは、我々のアプローチが基本的に有効であるとともに、有限次元の対象である Markov 測度と無限次元の対象である super-continuous 関数の Gibbs 測度の間の根本的な差異の存在を示している。

(研究代表者によるものを含め) 剛性問題に対するほとんどの先行研究が対象を Markov 測度に限定していたことを考えれば、この差異を明確な形にして一般の super-continuous 関数の Gibbs 測度に対してアプローチの有効性を確立することは重要であり、今後の課題としたい。

<引用文献>

(1) 研究代表者によるもの

① K. Nakagawa, A counterexample to the multifractal rigidity conjecture of piecewise linear Markov maps of the interval, *Dyn. Syst.* 31 (2016), 466-482.

② K. Nakagawa, Multifractal rigidity for piecewise linear Markov maps, *Stoch. Dyn.* 17 (2017), 1750006-1-1750006-26.

③ K. Nakagawa, Compactness of transfer operators and spectral representation of Ruelle zeta functions for super-continuous functions, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 40 (2020), 6331-6350.

④ K. Nakagawa, Rigidity of entropy spectra for one-parameter family of polynomials, *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)* (2022), 623-645.

⑤ K. Nakagawa, Continuity of isomorphisms applied to rigidity problems of entropy spectra, *Dyn. Syst.* 38 (2023), 301-313.

(2) 研究代表者以外によるもの

⑥ L. Barreira, Y.B. Pesin and J. Schmeling, On a general concept of multifractality: multifractal spectra for dimensions, entropies and Lyapunov exponents. *Multifractal rigidity*, *Chaos* 7 (1997), 27-38.

⑦ L. Barreira and V. Saraiva, Multifractal nonrigidity of topological Markov chains, *J. Stat. Phys.* 130 (2008), 387-412.

⑧ Y. Pesin, *Dimension Theory in Dynamical Systems. Contemporary Views and Applications*, University of Chicago Press, Chicago, 1997.

⑨ M. Pollicott and H. Weiss, Free energy as a dynamical invariant (or can you hear the shape of a potential?), *Commun. Math. Phys.* 7 (1997), 27-38.

⑩ A. Quas and J. Siefken, Ergodic optimization of super-continuous functions on shift spaces, *Ergodic Theory Dynam. Systems* 32 (2012), 2071-2082.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 中川勝國	4. 巻 38
2. 論文標題 Continuity of isomorphisms applied to rigidity problems of entropy spectra	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Dynamical Systems	6. 最初と最後の頁 301-313
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1080/14689367.2023.2178388	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Nakagawa Katsukuni	4. 巻 53
2. 論文標題 Rigidity of Entropy Spectra for One-Parameter Family of Polynomials	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series	6. 最初と最後の頁 623-645
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00574-021-00274-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計1件（うち招待講演 0件/うち国際学会 1件）

1. 発表者名 中川勝國
2. 発表標題 Continuity of isomorphisms applied to rigidity problems of entropy spectra
3. 学会等名 研究集会「エルゴード理論とその周辺」（国際学会）
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

広島大学大学院先進理工系科学研究科 最新の研究  
<https://adse.hiroshima-u.ac.jp/?p=2482>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------