

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 6 年 5 月 15 日現在

機関番号：12614

研究種目：若手研究

研究期間：2021～2023

課題番号：21K13818

研究課題名（和文）新型の消散構造の解明と対称双曲系に対する一般的な安定性解析法の探究

研究課題名（英文）Elucidation of new dissipative structure and exploration of general stability analysis method for symmetric hyperbolic system

研究代表者

森 直文（Mori, Naofumi）

東京海洋大学・学術研究院・准教授

研究者番号：10803413

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,500,000円

研究成果の概要（和文）：気体力学、流体力学、弾性体力学等に現れる偏微分方程式がもつ消散構造は複雑・多様で、解の安定性に関する証明の多くが個別・技巧的で応用性に欠く。そのため、消散構造が生じる自然のメカニズムの解明と、一般の場合に統一的な証明を与えることが重要である。本研究を通じて、複雑流体を表す数値モデルの消散構造や、一般的な強正定値記憶核を持つ対称双曲型、対称双曲・放物型の偏微分方程式それぞれの減衰特性と線形減衰評価の統一的な導出方法が具体的に明らかになり、解の安定性を一般的な対称双曲系や対称双曲・放物系の場合でも統一的に示すことに寄与できた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

粘性的 Timoshenko 方程式系や記憶型 Laminated beams など、Timoshenko 方程式系に関連する新モデルの開発が現在も盛んに行われている。しかし、その減衰評価については、従来型の消散構造に対応するように物理係数に制約条件を仮定して導出されていることが多く、一般的な減衰特性の解明はほとんどされていなかった。また、指数的に減衰する記憶核よりも一般的な記憶項をもつ対称双曲系や対称双曲・放物系に関する統一的な研究成果は、本研究の中で初めて得られた。新型の消散構造を持つ偏微分方程式に関する本研究成果は、川島秀一氏らによる安定性理論の拡張にも貢献することが期待できる。

研究成果の概要（英文）：The dissipative structures of partial differential equations appearing in gas dynamics, fluid mechanics, and elastodynamics are complex and diverse, and many of the proofs of stability of solutions are individual and technical in nature and lack applicability. Therefore, it is important to elucidate the natural mechanisms that give rise to the dissipative structures and to provide a proof in the general case. Through this research, the dissipative structure of mathematical models for complex fluids and a unified method for deriving decay properties and linear decay estimates for symmetric hyperbolic and symmetric hyperbolic-parabolic systems with strongly positive definite memory kernels were clarified, and the stability of solutions was demonstrated in a unified manner as well. The results contributed to the unified presentation of stability of solutions to general symmetric hyperbolic and symmetric hyperbolic-parabolic systems.

研究分野：非線形偏微分方程式論

キーワード：非線形偏微分方程式 対称双曲系 対称双曲・放物系 消散構造 安定性理論 Timoshenko 方程式系 記憶型消散効果をもつ数値モデル

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 1. 研究開始当初の背景

気体力学、流体力学、弾性体力学等に現れる偏微分方程式には、物理的に自然な形で「消散構造」を伴うものが多い。例えば、熱方程式  $u_t = \kappa u_{xx}$  を空間変数  $x$  について Fourier 変換した方程式を考えると、固有値は  $\lambda(i\xi) = -\kappa|\xi|^2$  であり、これが熱方程式のエネルギー減衰の特徴を表しているといえる。より一般的に、不等式

$$\operatorname{Re} \lambda(i\xi) \leq -c|\xi|^{2p}/(1 + |\xi|^2)^{p+q} \quad (\text{ただし } c \text{ は正定数で、 } p \geq 1, q \geq 0)$$

をみたすとき、タイプ  $p, q$  の消散構造という。とくに  $p = 1, q = 0$  のタイプの消散構造は、川島秀一氏(現・早稲田大学)らによる「安定性理論」(Kawashima et al. 1984, 1985)によって完全な特徴付けがなされた。これは、圧縮性 Navier-Stokes 方程式などに対する個別・技巧的な証明を一般化したもので、現在の数学解析の一つの柱となっている。

しかし近年、この安定性理論の枠組みに当てはまらない消散構造をもつ具体例の存在が明らかになってきた。これら「新型の消散構造」は、前出の不等式で  $q \geq 1$  となっているため、とくに高周波部分 ( $|\xi| \geq 1$ ) でエネルギー減衰が脆弱になるという特徴がある。

消散構造	具体例
従来型 ( $p = 1, q = 0$ )	圧縮性 Navier-Stokes 方程式、熱方程式など
新型 ( $p = 1, q = 1$ )	消散的 Timoshenko 系、圧縮性 Euler-Maxwell 系など
新型 ( $p = 2, q = 1$ )	Timoshenko-Fourier 系、Timoshenko-Cattaneo 系など

したがって、新型の消散構造をもつ偏微分方程式は、従来型とは高周波部分の評価が異なり、定量的な減衰評価において「可微分性の損失」が避けられない。この減衰特性が、消散過程の理解やエネルギー評価を困難にする。

これに対して報告者は、新型の消散構造をもつ典型例である Timoshenko 方程式系に様々な消散効果を導入し、物理的に重要な最良時間減衰率をもつ減衰評価と解の漸近挙動を示すことで、新型の消散構造の特徴付けと典型例の体系化を行ってきた。しかし、この研究成果は新型の消散構造の複雑さ・多様性を示すことになり、これらの解の安定性に関する証明の多くは極めて個別・技巧的である。そのため、一般の場合に統一的な証明を与えることができるかが重要であるが、安定性理論の拡張もまだ限定的にしか成功していない。

## 2. 研究の目的

新型の消散構造をもつ偏微分方程式を含めて、一般の場合で解の安定性の統一的な証明を与えることができるかということが解決すべき問題である。そこで、本研究の目的は、偏微分方程式系をもつ消散構造の特徴を具体的に明らかにするとともに、新型の消散効果をもつ一般の対称双曲系や対称双曲・放物系の場合でも、解の安定性を統一的に示すことができるようにすることである。

## 3. 研究の方法

より広い範囲で消散構造の特徴を明らかにするため、Timoshenko 方程式系の剪断応力に時間遅れを考慮したモデルを考察するなど、従来にはない方法で消散効果を導入した数理モデルの減衰特性を示す。また、解の安定性を示す個別・技巧的な方法を一般化するため、一般の対称双曲系と対称双曲・放物系に対して、物理・化学分野の具体例に最も広く応用できる記憶型の消散効果を導入して、減衰評価と解の漸近挙動を示す。

## 4. 研究成果

本研究を通じて、複雑流体を表す数理モデルの構築や消散構造による特徴づけを行った。また、指数的に減衰する記憶核よりも一般的な記憶項をもつ対称双曲系や対称双曲・放物系に関する統一的な研究成果も本研究の中で初めて得られ、両者の線形減衰の特徴に違いがあることを発見した。新型の消散構造を持つ偏微分方程式に関する本研究成果

は、川島秀一氏らによる安定性理論の拡張にも貢献することが期待できる。

### (1) 複雑な流体の熱力学的に整合性のあるモデリングと数学的解析

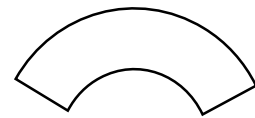
エネルギー保存とエントロピーの増大が保証されるように、理論力学的に矛盾のない方法で複雑流体の支配方程式を導いた。モデルは密度、流速、エネルギー(あるいは温度)、コンフォメーションテンソルに関する一階偏微分方程式系である。バロトロピックモデルも導出された。一次元の場合で双曲平衡則の形でバロトロピックモデルを表現し、安定条件を満たすことを示した。その結果、平衡状態付近での解の大域的存在が証明され、最良の時間減衰率も得られた。

### (2) 記憶型拡散を伴う対称双曲線系の減衰特性

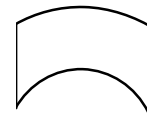
メモリ型拡散を持つ対称双曲線系の減衰特性を考察した。構造条件(職人技条件と呼ばれる)の下で、系が一様に散逸し、解が対応する減衰特性を満たすことを証明した。証明は、強正定値核の性質を巧みに利用した、フーリエ空間におけるエネルギー法に基づいている。

### (3) 実直線上の新しい部分散逸粘弾性梁系の減衰特性

せん断力に結合した記憶減衰を持つ(1次元)実直線上の粘弾性 Timoshenko モデルを考察した。梁の鉛直方向の振動速度と回転速度が等しいという仮定と、この仮定がない場合の系の減衰特性を完全に明らかにすることができた。これは、せん断力に記憶型消散効果をもつ種々の梁の方程式系の問題に対する最初の結果である。証明方法は、いわゆる SK 条件のような拡張された構造条件(職人技条件の一つ)に基づいている。さらに、スペクトル解析法を用いて系の消散構造の特徴を与え、減衰評価の時間減衰率が最良であることも確認した。



一般的な梁の振動  
(剪断変形なし)



Timoshenko 梁

### (4) 記憶型緩和項を持つ対称双曲線系の減衰特性

記憶型緩和項を持つ対称双曲線系の減衰特性を考察した。記憶核が強正定値核であると仮定し、系が可微分性損失型の減衰特性を持つことを証明した。この証明は、構造条件(職人技条件または条件(K)と呼ばれる)とフーリエ空間におけるエネルギー法に基づいており、特に強正定値核に対する性質を改良して巧みに利用しているところがカギとなっている。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 N. Mori, M. A. Jorge Silva	4. 巻 19
2. 論文標題 Decay property for a novel partially dissipative viscoelastic beam system on the real line	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Hyperbolic Differential Equations	6. 最初と最後の頁 391-406
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0219891622500114	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yukihito Suzuki, Masashi Ohnawa, Naofumi Mori, Shuichi Kawashima	4. 巻 31 (10)
2. 論文標題 Thermodynamically consistent modeling for complex fluids and mathematical analysis	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Mathematical Models and Methods in Applied Sciences	6. 最初と最後の頁 1919-1949
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0218202521500421	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Mari Okada, Naofumi Mori, Shuichi Kawashima	4. 巻 276
2. 論文標題 Decay property for symmetric hyperbolic system with memory-type diffusion	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Differential Equations	6. 最初と最後の頁 287-317
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jde.2020.12.021	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計3件（うち招待講演 1件/うち国際学会 1件）

1. 発表者名 森 直文、岡田 真理、川島 秀一
2. 発表標題 Decay property for symmetric hyperbolic system with memory-type diffusion
3. 学会等名 2022 日本数学会 秋季総合分科会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 森 直文、岡田 真理、川島 秀一
2. 発表標題 Decay property for symmetric hyperbolic system with memory-type relaxation
3. 学会等名 2022 日本数学会 秋季総合分科会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 N. Mori, M. Okada, S. Kawashima
2. 発表標題 Difference in decay properties for symmetric hyperbolic system with memory-type diffusion and relaxation
3. 学会等名 The 8th Japan-China Workshop on Mathematical Topics from Fluid Mechanics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	川島 秀一  (Kawashima Shuichi)		
研究協力者	岡田 真理  (Okada Mari)		

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------