

令和 5 年 6 月 12 日現在

機関番号：51101

研究種目：若手研究

研究期間：2021～2022

課題番号：21K13846

研究課題名（和文）ヨスト解を用いたスプリットステップ量子ウォークの研究

研究課題名（英文）Studies of split-step quantum walks by Jost solutions

研究代表者

和田 和幸（Wada, Kazuyuki）

八戸工業高等専門学校・その他部局等・助教

研究者番号：80780197

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 800,000円

研究成果の概要（和文）：本研究はヨスト解と呼ばれる一般化固有関数を用いて、スプリットステップ量子ウォークの弱収束分布を明らかにすることが目的であった。スプリットステップ量子ウォークの分散関係を解析し、ヨスト解を構成することができた。その後は修正波動作用素の構成を行い、弱収束定理を証明する準備を整える事ができた。今後は定理の証明を完了させ、論文を公表できるように進めていきたい。また、本研究に関する内容として、Witten指数を明らかにすることができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

量子ウォークは近年注目されている量子コンピューターや量子アルゴリズムを始めとする諸分野への応用が期待されているモデルである。その中でスプリットステップ量子ウォークはトポロジカル相と深い関連がある。本研究は長時間挙動に関するものであり、その側面についてスプリットステップ量子ウォークが持つ性質を明らかにする事が出来た事は、諸分野への更なる応用が期待される事、分野横断的な発展が期待される点で、学術的・社会的な意義がある。

研究成果の概要（英文）：The goal of this research is to clarify the weak limit distribution of split-step quantum walks by the application of Jost solutions (Generalized eigenfunctions). We established the analysis of dispersion relation and construction of Jost solutions of split-step quantum walks. After that, we construct the modified wave operators. The rest of work is to complete the proof of weak limit theorems and to announce our results via research paper. Related to this research, we established the Witten index formula of split-step quantum walks.

研究分野：応用数学

キーワード：量子ウォーク ヨスト解 弱収束定理 Witten指数 ユニタリ同値類

1. 研究開始当初の背景

量子ウォークは「ランダムウォークの量子版」と称される数理モデルである。量子コンピューターや量子アルゴリズムへの応用が見つかった事を契機に盛んに研究されている。量子ウォークの定義はランダムウォークとのアナロジーで定義されるが、ランダムウォークと決定的に異なる点は極限分布に現れる。ランダムウォークは中心極限定理を介して正規分布に弱収束する事が知られている。一方、量子ウォークでは時刻の1乗のスケーリングを施す事で弱収束分布が得られる事、また得られた分布の形状が逆釣鐘型をしており、正規分布とは全く異なる事が明らかになった。これらの性質は「線形的広がり」と呼ばれている。また、ランダムウォークには無いもう一つの特徴は、「局在化」と呼ばれる現象が発生する事である。これは、量子ウォークを十分長く時間発展させた後、ある位置に存在確率が正で留まる現象である。

スプリットステップ量子ウォークは、北川氏によって導入されたモデルで、当初研究されていた量子ウォークの拡張に相当する。トポロジカル相を研究する為にこのモデルが提案された。様々な研究者により、スプリットステップ量子ウォークが持つ対称性から導かれる指数について明らかになってきた。この指数によって量子ウォークが持つ「局在化」との関係が明らかになってきた。一方、上記で述べた「線形的広がり」について、指数との関係性については明らかになってはいなかった。この点でスプリットステップ量子ウォークの弱極限分布を明らかにすることは重要な課題となっている。長距離型条件まで含めた弱極限分布の導出には波動作用素だけでは不十分である。そこでヨスト解に注目し、その解を用いて弱極限分布の導出を行う。

2. 研究の目的

本研究の目的はスプリットステップ量子ウォークに対応するヨスト解を用いて、弱収束分布を解明することである。

3. 研究の方法

方法として、以下の段階に分ける。

(1) スプリットステップ量子ウォークの(一般化)固有値問題を漸化式の形に変形し、転送行列を導出する。転送行列から導かれる分散関係を複素平面上の関数として捉え、双正則性を証明する。

(2) 縮小写像の原理を用いてヨスト解を構成する。一度ヨスト解が構成できれば、極限吸収原理を示す事ができる。その系として、特異連続スペクトルの非存在・埋蔵固有値の非存在を証明する事ができる。

(3) ヨスト解とユニタリ版ストーンの公式を用いて修正波動作用素を構成し、元のヒルベルト空間から絶対連続部分空間への部分等張作用素であることを示す。

(4) 修正波動作用素を用いて弱収束定理を証明し、弱収束分布を明らかにする。

4. 研究成果

(1) スプリットステップ量子ウォークの(一般化)固有値問題に対し、ヨスト解を構成することができた。更に、修正波動作用素を構成する事ができた。しかし、弱収束定理の証明を完了させる所まで進める事が出来なかった。弱収束定理を証明するにあたり、修正波動作用素と位置作用素の交換子を評価しなければならぬ可能性が浮上した。これは研究を始める段階では予想していなかった部分であるものの、数学的に興味深い対象である。早急にこの部分を解決し、証明を完了させたい。

(2) 本研究に関連して、スプリットステップ量子ウォークのユニタリ同値類を明らかにする事ができた。スプリットステップ量子ウォークを定義するためには、最大で8個の実パラメータを導入する必要がある。ユニタリ同値性の下で変形を施す事で、本質的に何個のパラメータでスプリットステップ量子ウォークが決まるかを明らかにした。スプリットステップ量子ウォークが北川氏によって導入された後、鈴木氏が拡張版として提唱したスプリットステップ量子ウォークがある。これら二つの量子ウォークは作用素としては異なるものの、本質的に同じものなのか、拡張になっているか、という問題があった。本研究で、これらは互いにユニタリ同値である事を証明した。

(3) スプリットステップ量子ウォークのWitten指数を明らかにする事ができた。スプリットステップ量子ウォークはトポロジカル相の研究の為に導入された数理モデルである。その背景から、スプリットステップ量子ウォークが有する対称性から導かれる指数を明らかにする研究が進められてきた。特に、カイラル対称性から導かれるフレドホルム指数を明らかにする研究が進められてきた。フレドホルム指数は、スペクトルギャップの存在を要請する。一方、スペクトルギャップが存在しない(閉じている)場合の研究は多くない。そこで、フレドホルム指数の拡

張に相当する Witten 指数を採用し、その指数公式を導出した。特に、非フレドホルム条件を満たす場合には、指数が半整数になる事を明らかにした。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Narimatsu Akihiro, Ohno Hiromichi, Wada Kazuyuki	4. 巻 20
2. 論文標題 Unitary equivalence classes of split-step quantum walks	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Quantum Information Processing	6. 最初と最後の頁 1-23
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s11128-021-03323-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Maeda Masaya, Suzuki Akito, Wada Kazuyuki	4. 巻 33
2. 論文標題 Absence of singular continuous spectra and embedded eigenvalues for one-dimensional quantum walks with general long-range coins	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Reviews in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 1-23
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0129055X22500167	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Matsuzawa Yasumichi, Suzuki Akito, Tanaka Yohei, Teranishi Noriaki, Wada Kazuyuki	4. 巻 -
2. 論文標題 The Witten index for one-dimensional split-step quantum walks under the non-Fredholm condition	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Reviews in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0129055X23500101	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計5件（うち招待講演 3件/うち国際学会 0件）

1. 発表者名 和田 和幸
2. 発表標題 非フレドホルムスプリットステップ量子ウォークのウィッテン指数
3. 学会等名 日本数学会2021年度秋季総合分科会 応用数学分科会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Kazuyuki Wada
2. 発表標題 Witten index for 1-dimensional split-step quantum walks under non-Fredholm condition
3. 学会等名 RIMS共同研究「スペクトル・散乱理論とその周辺」(招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 和田 和幸
2. 発表標題 1次元スプリットステップ量子ウォークのWitten指数
3. 学会等名 2021年度応用数学合同研究集会 離散系
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Kazuyuki Wada
2. 発表標題 Spectral theory and weak limit theorems in 1d
3. 学会等名 RIMS(Conference) Rigorous Statistical Mechanics and Related Topics (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Kazuyuki Wada
2. 発表標題 The Witten index for split-step quantum walks in 1d
3. 学会等名 Japan-Netherlands Joint Seminar: Index Theory and Operator Algebras in Topological Physics (招待講演)
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------