

令和 5 年 6 月 19 日現在

機関番号：12611

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2021～2022

課題番号：21K20319

研究課題名(和文) ホップ・ガロワ構造及びskew braceにおける存在問題

研究課題名(英文) Existence problems in Hopf-Galois structures and skew braces

研究代表者

TSANG SINYI (TSANGCINDY) (TSANG, SINYI)

お茶の水女子大学・基幹研究院・助教

研究者番号：10908271

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,600,000円

研究成果の概要(和文)：同位数をもつ有限群 $G$ と $N$ に対して、 $N$ のholomorphにおいて $G$ と同型な正則部分群が存在するとき、 $(G, N)$ がrealizableであると呼ぶことにする。本研究では、巡回群 $G$ に対して、 $(G, N)$ がrealizableとなるような群 $N$ を特定することに成功した。また、可解群 $G$ が存在し $(G, N)$ がrealizableとなるような単純群 $N$ を特定することにも成功した。関連課題として、冪零度2の $p$ -群のmultiple holomorphと呼ばれるものについても取り組んだ。

研究成果の学術的意義や社会的意義

同位数をもつ有限群 $G$ と $N$ に対して、 $(G, N)$ がrealizableであることは、ガロア群 $G$ をもつ拡大にタイプ $N$ のホップ・ガロア構造が存在すること、及び加法群が $N$ で乗法群が $G$ となるようなskew braceが存在することと同値である。前者は整数環のガロア加群構造の研究に応用があり、後者はYang-Baxter方程式の集合理論的解と関連していることが知られている。よって、 $(G, N)$ がrealizableか否かは重要な問題であり、本研究の成果はこのrealizabilityに関する研究を進展させた。

研究成果の概要(英文)：For any finite groups  $G$  and  $N$  of the same order, let us say that  $(G, N)$  is realizable when the holomorph of  $N$  contains a regular subgroup isomorphic to  $G$ . In this research, for any cyclic group  $G$ , we were able to determine the groups  $N$  for which  $(G, N)$  is realizable. Moreover, we were able to determine the simple groups  $N$  for which there exists a solvable group  $G$  such that  $(G, N)$  is realizable. As a related problem, we also studied the so-called multiple holomorph of some  $p$ -groups of class two.

研究分野：群論

キーワード：holomorph 正則部分群 ホップ・ガロア構造 skew brace 有限単純群  $p$ -groups of class two multiple holomorph

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

### 1. 研究開始当初の背景

$N = (N, \cdot)$  を有限群とし,  $\text{Hol}(N)$  をその **holomorph** とする.  $\text{Hol}(N)$  の部分群が正則であるとは,  $N$  への作用が正則, つまり推移的かつ自由であるときにいう.  $N$  と同位数をもつ群  $G$  に対して,  $\text{Hol}(N)$  において  $G$  と同型な正則部分群が存在するとき, ペア  $(G, N)$  が **realizable** であると呼ぶことにする.  $(G, N)$  が **realizable** か否かは, 以下の 2 つの条件と同値であることが知られている.

(a) ガロア群  $G$  をもつガロア拡大において, タイプ  $N$  のホップ・ガロア構造が存在する.

(b) 群  $N$  において,  $(N, *) \simeq G$  であり  $(N, \cdot, *)$  が **skew brace** となる群演算  $*$  が存在する. 前者は整数環のガロア加群構造の研究に応用があり[3], 後者は **Yang-Baxter** 方程式の集合理論的解と関連することが知られている[4]. よって,  $(G, N)$  が **realizable** か否かは重要な問題であり, 様々な群  $G$  と  $N$  に対して調べられてきた.

### 2. 研究の目的

本研究の主な目的は, まだ調べられていない群のペア  $(G, N)$  に対して,  $(G, N)$  が **realizable** か否かについて取り組むことであった. 具体的な課題として, 以下が挙げられていた.

(a)  $G$  が巡回群であるとき, どの  $N$  に対して  $(G, N)$  が **realizable** であるのか.

(b)  $G$  が概単純群であるとき, どの  $N$  に対して  $(G, N)$  が **realizable** であるのか.

(c)  $N$  が非可解群であるとき, どの可解群  $G$  に対して  $(G, N)$  が **realizable** であるのか.

課題(b)は, 以下の予想と関連する問題である.

**予想.**  $G$  が非可解群であるとき,  $(G, N)$  が **realizable** であれば  $N$  も非可解群である.

この予想の逆が成立しないことが知られており[2], 課題(c)はその反例に関する問題である.

### 3. 研究の方法

**Holomorph** の正則部分群について, 交叉準同型と特性部分群を用いた研究手法がある. また, 固定点を持たない準同型写像のペアと群の分解と関連していることも知られている. これらのツールを用いて, 既存の研究手法を応用または一般化し, 課題(a)と課題(c)に取り組んだ.

### 4. 研究成果

まず, 課題(a)について,  $G$  が巡回群であるとき,  $(G, N)$  が **realizable** となるような群  $N$  をすべて特定することに成功した. 具体的に,  $N$  が **C-群** であるとき, すなわち  $N$  の **Sylow** 部分群がすべて巡回群であるとき,  $(G, N)$  は必ず **realizable** である. また,  $N$  が **C-群** でないとき,  $(G, N)$  が **realizable** となる必要十分条件は,  $N$  が  $M \rtimes_{\alpha} P$  と同型であることである. ただし,  $M$  は奇位数をもつ **C-群** であり,  $P$  は位数が 2 のべきの二面体群もしくは一般四元数群であり, かつ準同型写像  $\alpha: P \rightarrow \text{Aut}(M)$  は以下の条件のどちらかを満たす.

(1)  $P = D_4$  または  $P = Q_8$  のとき,  $\alpha(P)$  の位数が 1 か 2 である.

(2)  $P = D_{2^m}$  ( $m \geq 3$ ) または  $P = Q_{2^m}$  ( $m \geq 4$ ) のとき,  $\alpha(r) = 1$  である.

ここで,  $r$  は  $P$  の標準的な表示における位数  $2^{m-1}$  の生成元を表している. この成果は,

**C. Tsang, Hopf-Galois structures on cyclic extensions and skew braces with cyclic multiplicative group, Proc. Amer. Math. Soc. Ser. B 9 (2022), 377–392.**

にて収録されている.

次は、課題(c)について、 $N$ が任意の非可解群であるときは難しいので、第一歩として $N$ が非アーベル単純群の場合に限定して取り組んだ。また、 $(G,N)$ が **realizable** となる可解群  $G$  を特定するのではなく、 $(G,N)$ が **realizable** となる可解群  $G$  が存在するような  $N$  を調べることにした。そして、 $N$  は以下のどれかと同型である必要十分条件を挙げることに成功した。

(1)  $\text{PSL}_3(3)$ ,  $\text{PSL}_3(4)$ ,  $\text{PSL}_3(8)$ ,  $\text{PSU}_3(8)$ ,  $\text{PSU}_4(2)$ ,  $M_{11}$  .

(2)  $\text{PSL}_2(q)$ ,  $q \neq 2,3$  は素数冪 .

この成果は、

**C. Tsang, Non-abelian simple groups which occur as the type of a Hopf-Galois structure on a solvable extension, Bull. Lond. Math. Soc. (to appear)**

にて収録されている。

課題(b)について進展はなかったが、**holomorph** の正則部分群の研究と関連して、当初に挙げられていた課題の他に、**multiple holomorph** についても取り組んだ。群  $G$  に対して、 $\text{Hol}(G)$  に含まれる  $G$  と同型な正規かつ正則部分群が群をなすことが知られており、この群を  $T(G)$  とおく。様々な群  $G$  に対して、 $T(G)$  の構造や位数が調べられてきた。本研究では、冪零度  $2$  の  $p$ -群( $p$  は奇素数)に注目し、 $T(G)$  の位数を限りなく大きくできることを証明した。また、 $T(G)$  の位数が  $p-1$  以上であることが知られており [1],  $T(G)$  の位数がちょうど  $p-1$  となるような  $G$  の例も挙げた。これらの成果は、

**A. Caranti and C. Tsang, Finite  $Sp$ -groups of class two with a large multiple holomorph, J. Algebra 617 (2023), 476–499.**

**A. Caranti and C. Tsang, Finite  $Sp$ -groups of class two with a small multiple holomorph, preprint (arXiv:2303.10638).**

にて収録されている。

<引用文献>

[1] **A. Caranti, Multiple holomorphs of finite  $Sp$ -groups of class two. J. Algebra 516 (2018), 352–372.**

[2] **N. P. Byott, Solubility criteria for Hopf-Galois structures, New York J. Math. 21 (2015), 883–903.**

[3] **L. Childs, Taming wild extensions: Hopf algebras and local Galois module theory. Mathematical Surveys and Monographs, 80. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.**

[4] **L. Guarnieri and L. Vendramin, Skew braces and the Yang-Baxter equation. Math. Comp. 86 (2017), no. 307, 2519–2534.**

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Tsang Cindy (Sin Yi)	4. 巻 9
2. 論文標題 Hopf-Galois structures on cyclic extensions and skew braces with cyclic multiplicative group	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society, Series B	6. 最初と最後の頁 377 ~ 392
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/bproc/138	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Caranti A., Tsang Cindy (Sin Yi)	4. 巻 617
2. 論文標題 Finite p-groups of class two with a large multiple holomorph	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 476 ~ 499
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2022.11.013	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Tsang Cindy (Sin Yi)	4. 巻 -
2. 論文標題 Non abelian simple groups which occur as the type of a Hopf-Galois structure on a solvable extension	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Bulletin of the London Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1112/blms.12860	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計4件（うち招待講演 0件/うち国際学会 4件）

1. 発表者名 TSANG SIN YI
2. 発表標題 Characterization of the type of Hopf-Galois structures on cyclic extensions
3. 学会等名 Hopf Algebras and Galois Module Theory (国際学会)
4. 発表年 2022年 ~ 2023年

1. 発表者名 TSANG SIN YI
2. 発表標題 Finite $p$ -groups of class two with a very large multiple holomorph
3. 学会等名 Hopf Algebras & Galois Module Theory (国際学会)
4. 発表年 2022年～2023年

1. 発表者名 TSANG SIN YI
2. 発表標題 Non-abelian simple groups which can occur as the additive group of a skew brace with solvable multiplicative group
3. 学会等名 Oberwolfach Mini-Workshop: Skew Braces and the Yang-Baxter Equation (国際学会)
4. 発表年 2023年～2024年

1. 発表者名 TSANG SIN YI
2. 発表標題 Regular subgroups in the holomorph, fixed point free pairs of homomorphisms, and group factorizations
3. 学会等名 Hopf Algebras & Galois Module Theory (国際学会)
4. 発表年 2023年～2024年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
イタリア	University of Trento			