様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　５ 年　 ５ 月 １７ 日現在

機関番号：１３１０１
研究種目：研究活動スタート支援
研究期間：2021～2022
課題番号：２１Ｋ２０３２０

研究課題名（和文）Hilbert多様体のC*環を用いたWitten種数の研究

研究課題名（英文）A study on the Witten genus by C*-algebras of Hilbert manifolds

研究代表者
高田　土満（Takata, Doman）

新潟大学・人文社会科学系・講師

研究者番号：５０９１１５８３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,400,000円

研究成果の概要（和文）：本研究のテーマは，ループ空間の指数理論を構築することである．ループ空間は数学や物理で自然と現れる無限次元空間であり，その指数理論としては，形式的なものは存在していたが，非可換幾何的できちんとした枠組みを持ったものは存在していなかった．本研究で構築した理論は，「ループ空間の同変解析的指数」を，ループ空間から決まるＣ＾＊環のＫＫ群からの準同型として定義する，非可換幾何的な枠組みを備えたもので，固定点公式まで証明できた．今後の課題は，その理論の具体例を解析的に構成することと，Ｋ理論的な手法（代数トポロジー的手法）でその指数の性質を明らかにすることである．

研究成果の学術的意義や社会的意義
まず，ループ空間の指数理論は，Ｗｉｔｔｅｎを初めとして，様々な数学者・物理学者が興味を持っていたが，それを非可換幾何という正当な枠組みで構成したことは，学術的に非常に重要な結果である．その副産物として，Ｈｉｌｂｅｒｔ多様体のＣ＾＊環のある種の関手性についての結果を得た．Ｈｉｌｂｅｒｔ多様体のＣ＾＊環の定義は非常に自然であるため，そのような結果が出たことは，今後のＨｉｌｂｅｒｔ多様体の研究において意味のあることである．
ループ空間は，数学だけでなく物理においても自然な対象であり，固定点公式の記述で計算能力の高い位相的Ｋ理論を用いた本研究は，将来的には物理への応用も期待できる．

研究成果の概要（英文）：The theme of this research is to construct an index theory for loop spaces. A free loop space is a natural object in mathematics and physics. There was no rigorous framework for index theory of loop spaces. In this research, I constructed an index theory for loop spaces in terms of noncommutative geometry, in which the S1-equivariant analytic index homomorphism is a homomorphism from KK-group of the C*-algebra of a loop space. My next challenge is to construct a concrete element of the KK-group of the C*-algebra of a loop space and to investigate properties of the index homomorphism using some algebraic topological technique.

研究分野：非可換幾何学

キーワード：指数定理　ループ空間　Ｈｉｌｂｅｒｔ多様体のＣ＾＊環　位相的Ｋ理論　ＫＫ理論　非可換幾何学

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

　本研究のテーマはループ空間の指数理論を，非可換幾何学を用いて構成することである．ここでは，その先行研究についてまとめておく．まず，そもそも指数定理とは，Atiyah-Singer の指数定理のことである．この定理は，閉多様体上の Dirac 作用素という微分作用素の Fredholm 指数（=解析的不変量）が，その作用素が定まるベクトル束の特性類の積分（=位相的不変量）に一致するという定理である．この定理には様々な変種が知られており，代表的なのは「コンパクト群作用を持つコンパクト多様体の同変指数は，固定点集合での特性類の積分で書ける」ということを主張する Atiyah-Segal-Singer の固定点公式である．

　Kasparov の KK 理論は，C^*環の組の不変量であるが，指数定理を捉えるのに最適な枠組みを提供する．実際に Kasparov は，KK 理論を用いて，同変指数定理の非コンパクト版を定式化し証明した．すなわち，多様体 X 上の G 同変 Dirac 作用素は X の関数環の G 同変 K ホモロジー群の元を定め，主表象は X の G 同変位相的 K 理論の元を定め，「K 理論的 Poincare 双対」によって両者は対応する．この理論を用いて，Atiyah-Segal-Singer の固定点公式を「非コンパクト多様体 X にコンパクト Lie 群 G が作用している場合」に拡張したのが Hochs-Wang の指数理論である．すなわち，「解析的指数と見なせる，X の G 同変 K ホモロジーから G の表現環 R(G) を「g で局所化」した環 R(G)_g への準同型が定義でき，それは固定点公式を持つ」というのがこの論文の結果である．以下この準同型を HW の指数準同型と呼ぶ．その構成には，K 理論の局所化と R(G)_g による係数拡大が必要である．固定点公式の証明には，Kasparov の KK 理論的 Poincare 双対を用いる．

歴史は前後するが，Witten 種数は，Atiyah-Segal-Singer の固定点公式をループ空間の場合に形式的に当てはめることで定義された．すなわち，コンパクト多様体 M の自由ループ空間 LM=C^¥infty(S^1,M)には，パラメータの付け替えによって S^1 が作用する．LM はコンパクトではないが，その S^1 作用の固定点は M 自身と同一視でき，コンパクトになる．よって，固定点公式の表示自体は意味を持つことになり，それが Witten 種数である．この不変量の問題は，指数理論的な裏付けがないことである．ところで，幾何学と C^*環が結びつく根拠は Gelfand-Naimark の定理である．この定理は，「可環 C^*環と局所コンパクトハウスドルフ空間は，無限遠で消える連続関数のなす環を取るという操作によって，一対一に対応する」ということを主張する．無限次元多様体は局所コンパクトではないため，対応する可換 C^*環は存在しない．しかし，Higson-Kasparov-Trout によって無限次元 Hilbert 空間の「関数環」が定義され，その構成は Gong-Wu-Yu によって「無限次元非正曲率空間」に拡張された．その後 Yu はその構成を，ある種の完備性を満たす無限次元 Hilbert 多様体にまで拡張した（研究集会で発表）．以下，この構成を Hilbert 多様体の C^*環と呼ぶ．

参考文献：M. Atiyah and G. Segal, “The index of elliptic operators: II”, Ann. of Math. (2) 87 **1968 531-545.**G. Kasparov, “Elliptic and transversally elliptic index theory from the **viewpoint of KK-**theory”, J. Noncommut. Geom. 10 (2016)**, no. 4, 1303-1378.**

P. Hochs and H. Wang, “A fixed point theorem on noncompact manifolds”, Ann. K**-Theory 3 (2018), no. 2, 235–286.**

E. Witten, “The index of the Dirac operator in loop space”, Elliptic curves and modular forms **in algebraic topology (Princeton, NJ, 1986), 161-181, Lecture Notes in Math., 1326, Springer, Berlin, 1988.**

S. Gong, J. Wu and G. Yu, “The Novikov conjecture, the group of volume preserving **diffeomorphisms and Hilbert-**Hadamard spaces”, Geom. Funct. Anal. 31 (2021), no. 2, 206–**267.**

２．研究の目的

　このような研究の流れの中で，次のような問題に行き着くのは自然である．すなわち，「Yu の Hilbert 多様体の C^*環と KK 理論を用いて，Witten の『ループ空間の指数理論』を，非可換幾何的に再現せよ」．この問題を解決するのが，本研究の第一の目的である．

そして，この問題を解決してゆく中で，無限次元多様体を非可換幾何的に扱う技術が発展するだろう．そのような副産物を生み出すことは，本研究の第二の目的である．

３．研究の方法

　研究の直接的な目的は，前項で述べた通りである．作業工程的に書くと以下のようである．

(1) Yu が定義したループ空間の C^*環を使って，「ループ空間の Dirac 作用素」が住むべき群を定義する．

(2) 申請者が定義した「非局所コンパクト空間の位相的 K 理論」を使って，「ループ空間の Dirac 作用素の主表象」が住むべき群を定義する．

(3) そのあいだの準同型（Poincare 双対準同型）を定義する．

(4) Hochs-Wang の指数準同型を真似して，ループ空間の解析的指数準同型を定義する．

(5) その準同型に対応した固定点公式を証明する．
(6) 解析的指数の具体例を構成し，位相幾何的に指数の性質を解明する．
このうち(1)から(3)は，先行研究や自分自身のこれまでの結果（あるいはその組み合わせ）ですでに得られていた．(6)については今後の課題とする．ここでは(4)と(5)についてのアイディアを述べる．

まず, 構成の手本となる Hochs-Wang の解析的指数準同型には, 同変 K ホモロジーの「R(G)_g による局所化」という操作が含まれていることに注意する．R(G)は多様体に作用している Lie 群 G の表現環，g は G の元で，R(G)_g は「g で指標が消えないヴァーチャル表現が作る積閉集合」である．この操作によって同変 K ホモロジーに可逆元が増える．その代数的な性質によって指数が定義できるというのが，Hochs-Wang のアイディア（あるいは，Atiyah-Segal-Singer の固定点公式の証明の要点）である．

しかしこの議論は，無限次元ではうまくいかない．指数の局所化で使う「逆元」を構成するするときに空間の局所コンパクト性を使うからである．無限次元多様体は局所コンパクトではないので，この議論が使えないのだ．この問題は，K 理論は本質的に「有限ランクのベクトル束」を扱っていることに由来する．そこで，ある種のべき級数環を使うというのが，指数の構成のアイディアである．

固定点公式については，(4)で構成する指数準同型の各ステップを，(3)の Poincare 双対によって位相的 K 理論の言葉で書き換えることで証明できる．この流れは Hochs-Wang のものと同じである．

参考文献：D. Takata, “Topological Aspects of the Equivariant Index Theory of Infinite-Dimensional LTManifolds”, arXiv:2007.08899.

４．研究成果

研究成果は，論文” **An Index Theorem for Loop Spaces**”でまとめたので，詳細はそちらを参照していただくことにして，ここでは解析的指数の構成のアイディアについて述べる．まず，Hochs-Wang の構成を振り返る．X を G 作用をもつ多様体で，固定点集合 M がコンパクトなものとする．このとき，X の G 同変 K ホモロジーK^G_0(X)から M の開近傍 U の G 同変 K ホモロジーK^G_0(U)への準同型が定まる．一方 M から U への閉埋め込みが誘導する K ホモロジー群の間の写像は，上で述べた「R(G)_g による局所化」を施すと可逆になる．よって U の同変 K ホモロジー群から M の同変 K ホモロジー群を局所化したものへの準同型が定義できる．これらを合成することで，K^G_0(X)から K^G_0(M)_g への準同型が定義できる．これにコンパクト多様体の通常の指数準同型を合成することで，K^G_0(X)を定義域とする指数準同型が定義できる．本研究のテーマは，この構成に平行したものを，ループ空間の場合に作ることである．

M をコンパクト多様体，LM をその自由ループ空間とする．LM の C^*環を A(LM)と書く．(1)の「ループ空間の Dirac 作用素が住むべき群」とは，S^1 同変 KK 群 KK_{S^1}(A(LM),S)のことである（S は特定の C^*環で，複素数体二つの直和と KK 同値になるものであるが，単に「簡単な C^*環」とだけ理解すれば良い）．指数は LM の S^1 作用による固定点，すなわち「定数ループ全体」である M のコピーに局所化するはずなので（あるいは，局所化するようなデータに考察の対象を絞っているだけかもしれないが），KK_{S^1}(A(LM),S)のデータを「M の管状近傍の関数環からのゼロ拡張」と見なせる準同型によって引き戻し（これは KK 理論の関手性から可能），KK_{S^1}(A(LM,U),S)への準同型を得る．U は M の LM における管状近傍なので，Thom 同型らしき結果が期待でき，実際に A(M)から A(LM,U)への C^*環としての準同型が定義できた．これで，「LM の Dirac 作用素が住むべき群」から「M の Dirac 作用素が住む群」への準同型が出来たのだが，これに M の指数準同型を合成しても，LM の指数とはみなせない．なぜなら，我々の準同型には Thom 準同型が含まれているからである（Hochs-Wang の構成は，「閉埋め込みの誘導準同型の逆」の局所化であった）．ではどうするかというと，Thom 準同型の影響を補正すれば良い．そこで「K 理論的 Euler 類の逆」との掛け算が必要になり，ここで無限ランクのベクトル束を許す枠組みである「べき級数環とのテンソル積」が力を発揮するのである．固定点公式の導き方は Hochs-Wang のものとパラレルなので，ここでは省略する．他には，研究期間初年度は，加藤毅教授（京都大学）との共同研究で，自由な有限群作用がある場合のゲージ理論的な結果があるが，本研究テーマに直接的に関係するものではないので，ここでは省略する．

参考文献：D. Takata, “**An index theorem for loop spaces**”, arXiv:2208.12129.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計1件（うち査読付論文　1件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 Doman Takata	４．巻 7
２．論文標題 An infinite-dimensional index theorem and the Higson-Kasparov-Trout algebra	５．発行年 2022年
３．雑誌名 Annals of K-theory	６．最初と最後の頁 1-76
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2140/akt.2022.7-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計4件（うち招待講演　2件／うち国際学会　1件）

１．発表者名 高田土満
２．発表標題 Seiberg-Witten写像の「Pin(2)同変K理論的写像度」と奇素数位数巡回群の表現論
３．学会等名 関西ゲージ理論セミナー
４．発表年 2021年

１．発表者名 高田土満
２．発表標題 Localized S1-equivariant index of non-compact manifolds and an analytic counterpart of Witten’s equivariant index of loop spaces
３．学会等名 変換群論の新潮流（招待講演）
４．発表年 2022年

１．発表者名 高田土満
２．発表標題 同変指数の局所化と形式的べき級数環　～Witten種数の非可換幾何的定式化に向かって～
３．学会等名 都立大幾何学セミナー
４．発表年 2022年

１．発表者名 Doman Takata
２．発表標題 An index theorem for loop spaces
３．学会等名 Japan-Netherlands Joint Seminar: Index Theory and Operator Algebras in Topological Physics（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2023年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関