

令和 6 年 6 月 13 日現在

機関番号：10106

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2021～2023

課題番号：21K20330

研究課題名(和文) 散逸的なランダム力学系に対する無限不変測度の構成と無限測度混合性への応用

研究課題名(英文) Construction of infinite invariant measures for dissipative random dynamical systems and application to infinite mixing

研究代表者

豊川 永喜 (Toyokawa, Hisayoshi)

北見工業大学・工学部・助教

研究者番号：30907762

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,400,000円

研究成果の概要(和文)：主目的であった一般の散逸的なランダム力学系に対して、 σ -有限無限不変測度を構成することは道半ばであるが、一方で力学系・ランダム力学系が高々有限個のエルゴード的な絶対連続不変確率測度(これらは特に物理的測度)を持ち、ほとんど全ての軌道が不変測度の台に漸近的に吸引されるための必要十分条件を特徴づけることに成功した。これにより散逸的な力学系をランダムに選択して得られるランダム力学系も十分に保存的かつエルゴード的で、 σ -有限な絶対連続不変確率測度を持ち得ることが確認された。また上の条件内で、エルゴード性を混合性に置き換えたものを特徴づけるであろう系の性質の候補を導入することで、今後の研究の方向性が見えた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

力学系理論は、物体の運動をはじめとして生物の世代ごとの個体数や気候などの時間発展を記述する数理モデルなど、あらゆる分野で出現し、それらの性質を数学的に研究することは基本的な問題である。さらに力学系に揺らぎが加わったランダム力学系を考えることも現実の物理現象などへの応用上重要である。本研究では、力学系・ランダム力学系について、統計の基礎である大数の法則が成り立つという意味で良い確率が高々有限個存在するための、等価な条件を導入し、様々な具体例についても統計的性質とともに考察することができた。

研究成果の概要(英文)：Although one of the main purposes, namely obtaining general results for the existence of σ -finite infinite invariant measures for dissipative systems, has not been accomplished yet, we have succeeded in characterising the finitude of ergodic absolutely continuous invariant probability measures, which are in particular physical measures, with the maximal support for (random) dynamical systems. From this result, we found that even if one considers random dynamical systems consisting of dissipative maps, it is not rare for them to admit conservative, ergodic and σ -finite absolutely continuous invariant measures. Additionally, if we replace 'ergodicity' with 'mixing' in the above finitude property, we have a candidate which could characterise it, and we proceed with this project.

研究分野：ランダム力学系理論

キーワード：絶対連続不変測度 物理的測度 混合性 マルコフ作用素 マルコフ作用素コサイクル エルゴード性

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

現象の時間発展を記述する力学系、および力学系にゆらぎが加わったランダム力学系に対して、物理的には平衡状態と密接に関連する、絶対連続な不変測度が存在するかどうかを判定する事は、エルゴード理論の基本的かつ重要な問題である。従来の研究では主に保存的な系を対象とし、(非可逆な)散逸的な系が、いつ絶対連続な不変測度を持ち、如何なる統計的性質を保有するかは未解決の問題であった。ここで、散逸的な系に絶対連続な不変測度が存在する時は必ず無限測度になるという事実から、興味ある不変測度は絶対連続な有限無限不変測度となる。さらに、近年急速に発展してきている無限測度エルゴード理論における、保存系に対する無限測度混合性と呼ばれる統計的性質と散逸系における統計的性質との対比も自然に興味ある対象であった。以上が、散逸的な力学系/ランダム力学系に焦点を絞り、絶対連続な有限無限不変測度の存在を判定し、不変測度を通じた統計的性質(特に無限測度混合性)を解析する基礎を与えるという本研究の発想に到った要因である。

2. 研究の目的

本研究の目的は、散逸的な力学系/ランダム力学系に対して絶対連続な不変測度を構成し、構成された不変測度を通じて散逸系を解析するための基盤を与えることである。より具体的には、次の2点が研究目的である。

- (1) 散逸的な力学系/ランダム力学系に対し、絶対連続な有限無限不変測度が存在するための同値条件を求める。
- (2) 散逸的な力学系/ランダム力学系に対し、無限測度混合性が成立する条件を確立する。

3. 研究の方法

本研究においては、参照測度に対して非特異な変換からなる力学系に対し定義される転送作用素と呼ばれる有界線形作用素の一般化である、マルコフ作用素と呼ばれる作用素を解析することで、ランダム力学系に対しても考察した。研究の目的(1)に対しては、散逸的な、若しくは極めて散逸的に近い(例えば非常に収縮的な枝を持つ次元写像)変換たちをランダムに選択することで得られるランダム力学系を、具体例ベースで研究を進めた。その中でマルコフ作用素の(抽象的な)性質として抽出できるものがあるかを考察した。目的(2)に対しては、既存の無限測度混合性や無限測度における極限定理の先行研究のほとんどが保存系に対してなされているため、それらの参考文献をもとに保存系との差異を考察しつつ研究を行った。

4. 研究成果

本研究の成果の概要は次の通りである。研究開始当初の目標であった、散逸系に対する絶対連続な有限無限不変測度の一般的な構成方法の獲得には到らなかったが、主な研究成果のひとつとして、Barrientos氏(Fluminense連邦大学)、中野氏(当時 東海大学)、中村氏(北見工業大学)との国際共同研究において、(1) 散逸的な変換をランダムに選択し反復することで得られるランダム力学系であっても、絶対連続な不変確率測度を十分に持ちうるということをマルコフ作用素の言葉で確認する事に成功した。これは、後述するPalis予想と呼ばれる問題とも密接に関わっており、本結果によりPalis予想の一部が成立するための必要十分条件を、決定論的力学系およびランダム力学系に対して与えたと見ることができる。また、(2) 散逸的な変換たちから成るランダム力学系の例について絶対連続な有限無限不変測度を構成し、極限定理を確立することに成功した。さらにそれらの結果から、(3) 混合性を特徴づける可能性のある性質を新たに定義することが出来た。詳細には以下の(1)~(3)である。

(1) 有限個のエルゴード的絶対連続不変確率測度の存在に関する結果について

力学系/ランダム力学系が与えられた時、系に対する物理的測度とは、時間平均がその測度に関する空間平均に一致する軌道が(参照測度で正測度となるという意味で)豊富に存在するような不変測度を指す。ここでエルゴード的かつ絶対連続な不変確率測度は特に物理的測度である。Palis予想とは、大雑把に言えば、滑らかな力学系の多くは、高々有限個の物理的測度を持ち、それらの測度の鉢は相空間を覆い、さらにある意味で摂動に対して安定である、という予想である。Barrientos氏、中野氏、中村氏との共同研究においては、力学系/ランダム力学系が有限個のエルゴード的かつ絶対連続な不変確率測度を持ち、それらの測度の鉢が相空間全体を(参照測度についてほとんど至る所を)覆うための必要十分条件として、対応するマルコフ作用素が平均緊縮的であることで特徴づけることに成功した。ここで、平均緊縮性とは、Lasota-Li-Yorke等によってよく研究された緊縮性を緩めた条件として本研究で導入されたものである。さらに、その他にもマルコフ作用素に新たな分類を導入し、それぞれをエルゴード論的観点から豊富な具体例とともに考察した。本結果の特筆すべき帰結のひとつとして、Araujo等の物理的測度の存在に関する先行研究における仮定を大幅に緩めることができ、彼らの仮定のもとで強い混合性を意味する、相関関数の指數的減衰ま

で結論づけることができた。さらに、研究成果(3)に関連する、マルコフ作用素に対する漸近緊縮性の概念も本研究で導入された。これらの結果をまとめた論文は国際学術誌「Astérisque」に出版を受理された。

中野氏、中村氏との共同研究では、上記 Araujo による物理的測度が有限個存在するための十分条件の仮定のもとで、リャプノフ指数と呼ばれるある種カオスの指標となる値がほとんど全ての軌道について存在する事を示した。この結果については国際学術誌「Discrete and Continuous Dynamical Systems B」に掲載された。注意として、この結果と上記の Araujo の仮定を弱めても得られる結果を組み合わせる事で、帰結であるリャプノフ指数の存在はより弱い仮定でも成立することが示唆される。

上記の結果と関連して、中村氏との共同研究では、反復するマルコフ作用素が毎回変わるという意味で急冷的なランダム力学系にも応用可能な、マルコフ作用素コサイクルに対する絶対連続な不変確率測度の存在に関する結果についても得ることに成功し、結果を纏めた論文は国際学術誌「Stochastics and Dynamics」に掲載を受理された。

- (2) 散逸的な力学系から得られるランダム力学系に対する無限不変測度の構成と極限定理について

矢野氏(当時 京都大学)、中野氏、中村氏との共同研究では、いくつかの仮定を満たす区間上の 2 つの散逸的な変換を確立的に選択することで得られるランダム力学系に対し、保存的でエルゴードのかつルベグ測度に絶対連続な σ -有限無限不変測度を具体的に構成し、さらに一般化逆正弦法則および Darling-Kac 則と呼ばれる極限定理を得た。この結果を纏めた論文は国際学術誌「Nonlinearity」に掲載された。

井上氏(愛媛大学)との共同研究では、共通の中立不動点と非常に散逸的に振る舞う枝を同時に持ち得る区間上の区分的に凸なランダム力学系に対してエルゴードのかつルベグ測度に絶対連続な σ -有限不変測度を構成し、不動点周りでの不変測度の評価を与えることに成功した。この結果を纏めた論文は国際学術誌「Nonlinearity」に掲載された。

また、研究成果(1)の応用として、一般のマルコフ作用素が有限個の保存的でエルゴードのかつ絶対連続な σ -有限不変測度を持つための必要十分条件として、誘導またはジャンプと呼ばれる手法で得られる対応する作用素が平均緊縮的である事を示した。これは本研究プロジェクトの大元の目標であった散逸的な σ -有限無限不変測度の存在の補完的な結果である。この結果については現在論文に纏め投稿準備中である。

- (3) ランダム力学系に対する混合性の考察とその進展について

混合性に対する具体例をもとにした考察として、研究成果(2)内、区間上のランダム区分凸写像および自身の先行研究で考察したランダム写像に関して、様々な極限定理や無限測度混合性について現在解析中であり、既に部分的な結果を得ることに成功した。

また研究成果(1)内で導入されたマルコフ作用素に対する漸近緊縮性は、有限個の混合的な絶対連続不変確率測度の存在と対応しているとアイデアが得られ、現在こちらの方向も研究を進めている。

さらに中野氏、中村氏との共同研究では、急冷型ランダム力学系にも応用可能なマルコフ作用素コサイクルに対して、ランダム環境における観測関数の観点から、複数の混合性の定義を導入し、それぞれの定義の関係を明らかにした。この結果を纏めた論文は国際学術誌「Nonlinearity」に掲載された。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 6件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Pablo G.Barrientos, Fumihiko Nakamura, Yushi Nakano, Hisayoshi Toyokawa	4. 巻 -
2. 論文標題 Finitude of physical measures for random maps	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Asterisque	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Inoue Tomoki, Toyokawa Hisayoshi	4. 巻 37
2. 論文標題 Invariant measures for random piecewise convex maps	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Nonlinearity	6. 最初と最後の頁 055016 ~ 055016
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1088/1361-6544/ad2ff9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Nakamura Fumihiko, Nakano Yushi, Toyokawa Hisayoshi, Yano Kouji	4. 巻 36
2. 論文標題 Arcsine law for random dynamics with a core	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Nonlinearity	6. 最初と最後の頁 1491 ~ 1509
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1088/1361-6544/acb398	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Nakamura Fumihiko, Toyokawa Hisayoshi	4. 巻 -
2. 論文標題 Random invariant densities for markov operator cocycles and random mean ergodic theorem	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Stochastics and Dynamics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0219493724500096	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Nakamura Fumihiko, Nakano Yushi, Toyokawa Hisayoshi	4. 巻 35
2. 論文標題 Mixing and observation for Markov operator cocycles	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Nonlinearity	6. 最初と最後の頁 66 ~ 83
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1361-6544/ac355f	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Nakamura Fumihiko, Nakano Yushi, Toyokawa Hisayoshi	4. 巻 27
2. 論文標題 Lyapunov exponents for random maps	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Discrete and Continuous Dynamical Systems - B	6. 最初と最後の頁 7657 ~ 7657
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/dcdsb.2022058	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 井上友喜、豊川永喜	4. 巻 2217
2. 論文標題 区分的に凸なランダム写像の不変測度について	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 127〜136
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計9件 (うち招待講演 5件 / うち国際学会 4件)

1. 発表者名 Toyokawa, Hisayoshi
2. 発表標題 Finitude of physical measures for random maps
3. 学会等名 The 43rd Conference on Stochastic Processes and their Applications, Contributed Session Recent progresses on random dynamical systems (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 豊川永喜
2. 発表標題 Infinite invariant measures for random maps and their ergodic properties
3. 学会等名 21世紀の複雑系 研究集会 (津田先生古希記念研究集会) (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 豊川永喜
2. 発表標題 Ergodic sigma-finite invariant measures for random maps with uniformly contractive part
3. 学会等名 エルゴード理論研究集会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Toyokawa Hisayoshi
2. 発表標題 Finitude of ergodic σ -finite invariant measures for Markov operators
3. 学会等名 Recent Progress in Ergodic Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Toyokawa Hisayoshi
2. 発表標題 Finitude of ergodic σ -finite invariant measures for Markov operators
3. 学会等名 International Workshop on Ergodic Theory, Dynamical Systems, and Climate Sciences (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 豊川永喜
2. 発表標題 Mean constrictivity and ergodic σ -finite invariant measures for Markov operators
3. 学会等名 エルゴード理論研究集会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Toyokawa Hisayoshi
2. 発表標題 Invariant measures for random piecewise convex maps with the common indifferent fixed point
3. 学会等名 Quantitative aspects in complex analysis, geometry and dynamics (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 豊川永喜
2. 発表標題 マルコフ作用素に対する不変測度の存在と一次元ランダム力学系への応用
3. 学会等名 確率論研究会 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 豊川永喜
2. 発表標題 σ -finite invariant measures for Markov operators and the ratio sets for non-invertible transformations
3. 学会等名 ワークショップ「作用素環と力学系」(招待講演)
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------