様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６年　５月２５日現在

機関番号：３２６１２
研究種目：研究活動スタート支援
研究期間：2021～2023
課題番号：２１Ｋ２０３３２

研究課題名（和文）一次元大規模相互作用系における極限定理の研究

研究課題名（英文）Scaling limits for one-dimensional large scale interacting systems

研究代表者
須田　颯（Suda, Hayate）

慶應義塾大学・理工学研究科（矢上）・研究員

研究者番号：８０９１２３８６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　1,600,000円

研究成果の概要（和文）：(1)箱玉系の新しい線形化手法である「席番号配置」を導入した。これは、複数ある既存の線形化手法間の関係を与えるものでもある。席番号配置を活用することによって、一般的な状況の箱玉系に対する時空スケール極限が可能になると期待されており、部分的な結果は既に得られている。
(2)確率調和振動子鎖であって、原点に新しいタイプの境界条件を課した場合の巨視的な熱の振る舞いを考察した。コロナ禍の影響により研究を開始するのに遅れが生じ、補助事業期間中に完成はしなかったが、順調に進展している。

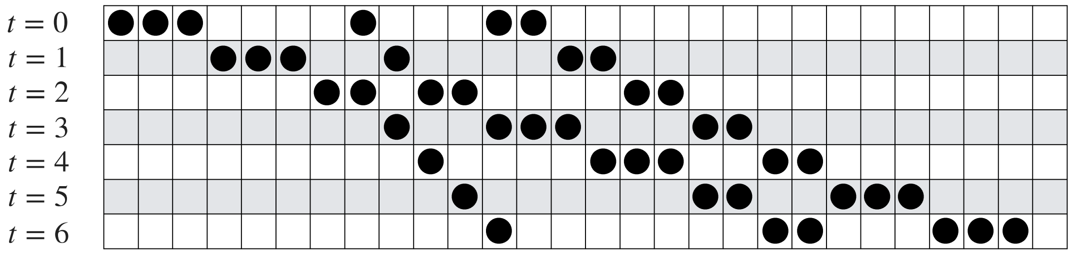
研究成果の学術的意義や社会的意義
巨視的な物理現象を微視的な数理模型から厳密に導出することは，統計力学に動機づけられた重要な問題である．本研究課題では，具体的な微視的系に関して，その巨視的振る舞いを導出するために必要な数学的道具の構成，またそれを用いた時空スケール極限の考察が行われた．これは，統計力学的な問題に数学的基礎づけを与えるものである．
「普遍性」の観点からは，類似した数学的構造を持つ微視的系に対しても同様の結果が得られることが期待されるため，本研究成果は関連する研究分野に今後の研究指針を与えるものとしても意味のあるものである．

研究成果の概要（英文）：(1)We introduce a new linearization method for the box-ball system, called " seat number configuration". This also gives a relationship between several existing linearization methods for the box-ball system. By utilizing the seat number configuration, it is expected that the space-time scaling limits for box-ball systems in more general situations will become possible, and partial results have already obtained.
(2)We consider the behavior of macroscopic heat diffusion for stochastic harmonic chains, where a new tyoe of boundary condition is imposed at the origin. Although there was a delay in starting the research due to the pandemic and it was not completed during the term of the grant, it is progressing well.

研究分野：数物系科学

キーワード：箱玉系　Box-Ball System　確率調和振動子鎖　大規模相互作用系　スケール極限

１．研究開始当初の背景
大規模相互作用系とは、巨視的に観測される物理現象を微視的レベルから解析するために用いられる数理模型の総称である。莫大な量の相互作用する粒子からなる自由度の非常に大きい系であり、このような物理系を扱うのが統計力学である。そして、確率論は、統計力学に基づく問題へ数学的基礎づけを与えるものとして、大きな役割を果たしている。現在まで確率論と統計力学は互いに刺激し合いながら発展を続けており、本研究課題はそのような大きい流れを背景に持つものである。
本研究課題は、一次元系における二つの興味深い問題 (1)可積分系に対する“一般化”流体力学、(2)熱の異常拡散現象 を扱うことを目標として開始した。以下では各問題の背景を簡潔に述べる。
・問題(1)の背景には、非平衡統計力学の新しい潮流として活発に研究されている、“可積分系に対する流体力学(一般化流体力学)” がある。これまでは良いエルゴード性を持つ微視的系に対する “巨視的流体力学の数学的導出(流体力学極限)” が確率論側で研究されてきたが、エルゴード性を持たない可積分系では同様の解析手法を用いることができず、一般化流体力学へ数学的にアプローチする，すなわち “一般化流体力学極限” を行うためには、新しい解析手法の構築が必要となる。一般化流体力学極限の数少ない成功例として、$\{0,1\}^N$上で定義されたランダム初期条件の “箱玉系” がある。箱玉系は高橋-薩摩によって導入された一次元セル・オートマトンであり、そのダイナミクスは 0 を空箱, 1 を玉に見立て, 01 の半無限列の左端から空の “キャリア(荷車)”が走り，玉があれば拾い，玉を保持している状態で空箱を通過した際にはそこに下ろす，といったルールで定義することができる(下図参照)。



これまで箱玉系は古典/量子可積分系からの極限操作で得られることに由来する豊かな数学的性質が研究されており、特にダイナミクスが“線形化可能”であること、また組み合わせ論・表現論的に自然な一般化があることなどが知られているが、統計力学的なモチベーションから扱われることは近年まであまりなかった。また、一般化流体力学極限で用いられた手法は、確率論的な観点から生まれた新しい “線形化手法”に強く依存しており、これは通常の箱玉系にのみ適用可能なものであって、箱玉系の一般化や極限操作を通して関連するモデルに対してそのまま適用できるものではない。そこで、これまで箱玉系の研究で用いられていた組み合わせ論・表現論的な“言葉”と、確率論的な“言葉”の対応を与えることができれば、関連するモデルに対する一般化流体力学極限が達成されうるのではないか,というアイデアが生まれた。
・問題(2)の背景には、一次元非線形ハミルトン系に広く見られる、熱伝導の基本則であるフーリエ則の “破れ” がある。しかし、一般的に決定論的な時間発展をする非線形系を数学的に扱うことは困難であり、またそのような系からフーリエ則を導出すること自体が未だに達成されていない難問である。近年では、非線形効果の近似として、 “線形ハミルトン系に確率的なノイズを加えたモデル(確率調和振動子鎖)” が導入され、数値実験と整合する数学的結果が得られていることから、非線形系の良い近似モデルとして活発に研究されている。特に、確率調和振動子鎖の巨視的系の熱拡散は、分数階拡散方程式 $\partial_t e(y,t) = -(-\Delta)^{\alpha/2} e(y,t),\ 0 < \alpha \leq 2$ に従うことが知られており、その指数αはノイズの強さとハミルトニアンのポテンシャルに依存する。最近ではより進んだ研究として、微視的系に点熱源などの境界条件を与え、それが及ぼす巨視的影響が調べられている。この場合の巨視的熱拡散は、ある一点で熱の通過/反射/吸収が生じる境界条件付き分数階拡散方程式になることが知られている。
２．研究の目的
本研究課題の目的を、背景で述べた問題(1),(2)ごとに述べる。
・問題(1)における目的は、従来知られていた箱玉系の線形化手法である、“Kerov-Kirillov-Reschetikhin 写像(KKR 写像)”と、箱玉系を確率論的に扱う観点から生まれた線形化手法である “スロット配置” の対応を与えることである。KKR 写像は箱玉系の一般化に対しても適用可能であることから、この対応により、一般化流体力学極限をそのようなモデルらに拡張することが可能になると期待される。また、この対応を通して、スロット配置を一般の箱玉系に拡張することが可能になりうる。スロット配置は$\{0,1\}^Z$上で定義される両無限箱玉系の不変測度を構成する上で大きな役割を果たしており、箱玉系の一般化に対しても同様に役立つことが期待される。
・問題(2)における目的は、新しいタイプの境界条件を与えた場合、それが巨視的に及ぼす効果を考察することである。先行研究の例から境界条件付き分数階拡散方程式の導出が期待されるが、境界条件がどのようなものになるかは全く自明ではなく、そもそも分数階ラプラシアンは大

域的な作用素であることから、境界条件は分数階ラプラシアンの定義に含まれることに注意されたい。また、境界条件付きの分数階拡散方程式は偏微分方程式論でもあまり研究例がないものであり、この観点でも自然な設定からどのような境界条件が導出されるのかは興味深い。

３．研究の方法

研究の方法を、問題(1),(2)ごとに述べる。

・問題(1)について、KKR 写像とスロット配置の対応が自明でない理由の一つは、その構成方法にあった。KKR 写像は 0,1 の半無限列を左端から読み込んでいくことにより順次構成可能であるが、スロット配置はあらかじめ 0,1 列を適当に分解する必要があるため、列全体の情報が必要となる。また、どちらの線形化手法も 0,1 列に対して様々な量を計算する必要があり、各手法間における計算の間にどのような対応があるのかも不明であった。研究代表者の須田らは、スロット配置の新たな数学的特徴づけを与えるところから始めた。須田はスロット配置をキャリアの言葉で特徴づける方法を発見し、この特徴づけによって、スロット配置を、0,1 の半無限列を左端から読み込んでいくことにより順次構成することが可能になった。一方で、キャリアを表現論的な立場で眺めた際、それは箱玉系に定義される“局所エネルギー”と関連しており、KKR 写像は局所エネルギーを通して理解することができる。 そこで、須田らはキャリアの概念を一般化した“席番号付きキャリア”を導入し、席番号付きキャリアが箱玉系の新しい線形化手法を与えることを証明した。この新しい線形化手法を以降では“席番号配置”と呼ぶ。また KKR 写像/スロット配置と席番号配置の関係をそれぞれ導出した。さらに、KKR 写像/スロット配置の構成上で現れる様々な量が、席番号配置の言葉で明示的に記述できることを証明した。これらの結果により、席番号配置を通して、KKR 写像とスロット配置の明示的な関係を得ることができた。
関連する結果として、“10-消去”と呼ばれる箱玉系の線形化手法と席番号配置の関係を証明した。KKR 写像と 10-消去の関係は[Kirillov-Sakamoto-09]によって知られていたが、本結果では先行結果を用いない直接証明を与えている。また、両無限箱玉系における定常状態の解析には、席番号配置と 10-消去を用いた手法が有用であることを、カレント計算を具体例に紹介した。

・問題(2)について、確率調和振動子鎖として、調和振動子鎖（線形ハミルトン系）に、隣接する振動子間の運動量をランダムに交換するノイズを加えたモデルを考え、さらにある一つの振動子にのみエネルギーを保存するような外場を境界条件として与える。興味があるのは各振動子のエネルギーから構成される経験分布の時空スケール極限であるが、二次的な量であるエネルギーは扱いが難しいため、代替物として、離散フーリエ変換を通して構成される調和振動子鎖の波動関数を “Wigner 変換”したものを微視的なエネルギー分布とし，以降では Wigner 分布と呼ぶ。Wigner 分布は空間上だけでなく， フーリエモード上のエネルギー分布の情報も併せ持つものであり、またエネルギー経験分布と Wigner 分布をフーリエモード上で積分したものの時空スケール極限が一致することは別途証明可能である。Wigner 分布の時空スケール極限を考察するにあたって、[Basile-Olla-Spohn-09, Jara-Komorowski-Olla-09] により構築された，2-ステップの極限(ミクロ→メゾ， メゾ→マクロ)による、確率調和振動子鎖から分数階拡散方程式を導出するアイデアを踏襲する。1-ステップ目の極限(ミクロ→メゾ)では、振動子間の距離 $N^{-1}, N \gg 1$に比例して小さくなる弱いノイズを考え、時間変数 t のオイラースケーリング Nt のもとで、$N \to \infty$ の極限をとる。この段階ではまだ拡散は生じず、エネルギーは弾道的輸送をしているが、確率的ノイズの効果により、異なるフーリエモード間の散乱効果が生じている。実際にこのような観察と対応する結果として、Wigner 分布は境界条件付き線形ボルツマン方程式に収束することが証明できる。2-ステップ目の極限(メゾ→マクロ)では，1-ステップ目で得られたボルツマン方程式の散乱項がマルコフ過程の生成作用素であることに着目し、解が境界条件付きマルコフ過程の汎函数を用いて表示できることが鍵となる。ボルツマン方程式にスケール変換$(y,t) \to (Ny, N^a t)$ を施すと、スケーリングされた散乱項に対応するマルコフ過程の$N \to \infty$における汎函数極限が境界条件付き$a/2$-安定過程に収束することが証明できる。一方で、同様のスケール変換されたボルツマン方程式の解は$N \to \infty$でフーリエモードに関して一様化されることが示される。これらを組み合わせることにより、スケール変換されたボルツマン方程式の解が境界条件付き分数階拡散方程式の解に収束することが証明される。先に挙げた 2-ステップ極限に関する先行研究は境界条件がない場合を扱っており、境界条件がある場合の 2-ステップ極限は、[Komorowski-Olla-20, Komorowski-Olla-Ryzhik-20, Bogdan-Komorowski-Marino-23]で扱われている。

４．研究成果

・問題(1)について、須田は、Matteo Mucciconi 氏(University of Warwick)，佐々田槙子氏(東京大学)，笹本智弘氏(東京工業大学)らと共に、席番号付きキャリアを用いた線形化手法である席番号配置を導入し、それを用いた KKR 写像とスロット配置の明示的対応を与えた。これは、スロット配置が導入された論文である [Ferrari-Nguyen-Rolla-Wang-21] において，conjecture とされていた問題でもある。本結果は既に論文誌へ掲載されている。10-消去と席番号配置の結果については、その内容を含んだプレプリントが arXiv 上にアップロードされている。

・問題(2)については、Marielle Simon 氏(University Lyon 1)と共に研究を行なっている最中であるが、その大枠は完成しつつある。コロナ禍の影響によって研究遂行の時期が遅れ補助事業期間中に研究が完成しなかったが、現在は順調に進展している。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計1件（うち査読付論文　1件／うち国際共著　1件／うちオープンアクセス　1件）

1．著者名 Mucciconi Matteo、Sasada Makiko、Sasamoto Tomohiro、Suda Hayate	4．巻 12
2．論文標題 Relationships between two linearizations of the box-ball system: Kerov-Kirillov-Reschetikhin bijection and slot configuration	5．発行年 2024年
3．雑誌名 Forum of Mathematics, Sigma	6．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1017/fms.2024.39	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

〔学会発表〕　計5件（うち招待講演　5件／うち国際学会　3件）

1．発表者名 Hayate Suda
2．発表標題 Relationships between two linearizations of the box-ball system : rigged configuration and slot decomposition
3．学会等名 Workshop on box-ball systems from integrable systems and probabilistic perspectives（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2022年

1．発表者名 Hayate Suda
2．発表標題 Relationships between two linearizations of the box-ball system : rigged configuration and slot decomposition
3．学会等名 Integrability, combinatorics and representation theory, MATRIX/RIMS tandem workshop（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2022年

1．発表者名 Hayate Suda
2．発表標題 Seat number cofiguration of the box-ball system
3．学会等名 Rigorous Statistical Mechanics and Related Topics（招待講演）
4．発表年 2022年

１．発表者名 Hayate Suda
２．発表標題 キャリア容量有限箱玉系に対する一般化流体力学極限
３．学会等名 大規模相互作用系の確率解析（招待講演）
４．発表年 2022年

１．発表者名 Hayate Suda
２．発表標題 Diffusive fluctuations for the box-ball system in low density regime
３．学会等名 The 21st Symposium Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2023年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
フランス	Universite Paris-Dauphine	Universite Lyon 1		