様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６ 年　６ 月 ２３ 日現在

機関番号：３２６６０

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2021～2023

課題番号：２１Ｋ２０３３６

研究課題名（和文）Ｌ２理論的手法による特異エルミート計量の研究とその代数幾何学への応用

研究課題名（英文）Studies on singular Hermitian metrics via L2 theoretic methods and their applications to algebraic geometry

研究代表者

稲山　貴大（Inayama, Takahiro）

東京理科大学・創域理工学部数理科学科・助教

研究者番号：００９０７４０４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,400,000円

研究成果の概要（和文）：曲率は幾何学において非常に重要であり，様々な観点から幅広く研究されてきた．曲率は大まかに言えば計量の二階微分に相当する概念であり，通常滑らかな計量に対してのみ定義される．本研究では，主に特異エルミート計量と呼ばれる滑らかとは限らない計量に対して，どのように曲率及びその正値性を定義するかという問題を研究してきた．具体的には，ベクトル束の特異エルミート計量に付随する乗数部分加群層の連接性，計量の正値性とL2拡張指数との関係といった問題について一定の成果を挙げた．

研究成果の学術的意義や社会的意義
特異エルミート計量に付随する乗数部分加群層がいつ連接層になるかという問いは，自然でかつ重要な問題である．実際，直線束の場合は，Nadelによって乗数イデアル層の連接性が解明されて以降，複素解析学や代数幾何学において数々の応用をもたらしてきた．特に，特異エルミート計量が単にGriffiths正値である場合は，Nadelの証明方法が直接適用できないため，本質的に新しいアプローチが必要となる．実際私が提唱した予想及びそれに対する部分的な解明は，その後数々の研究者によって研究，改良されている．

研究成果の概要（英文）：Curvature is a crucial concept in geometry and has been widely studied from various perspectives. Roughly speaking, curvature corresponds to the second derivative of a metric and is usually defined only for smooth metrics. In this study, we have mainly researched how to define curvature and its positivity for metrics, specifically those called singular Hermitian metrics, which are not necessarily smooth. We have achieved certain results regarding problems such as the coherence of multiplier submodule sheaves associated with singular Hermitian metrics on vector bundles and the relationship between the positivity of metrics and L2 extension indices.

研究分野：複素解析幾何学

キーワード：特異エルミート計量　L2評価法　L2拡張定理　中野正値性　Griffiths正値性　連接層

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景
(1) ベクトル束上の特異エルミート計量 h に対して，それに付随する乗数部分加群層 E(h)は数学的に非常に重要な対象である．E の階数が 1，つまり E が単に直線束であった場合には，E(h)は乗数イデアル層と呼ばれ，Nadel によって 20 世紀後半に導入された，Nadel はその論文で，直線束上の計量が正値であるとき，それに付随する乗数イデアル層が連接層になることを証明した．その一般化として，ベクトル束上の特異エルミート計量 h が正値な計量であるとき，それに付随する乗数部分加群層が連接層になるかという問いは，自然でかつ重要である．
　しかしベクトル束上の計量の場合，単に正値であるといっても様々な種類の定義があることが知られている．本稿では，その中でも最も強い正値性である中野正値性と，最も弱い正値性である Griffiths 正値性に話を絞って説明を行う．特異エルミート計量 h が中野正値である場合，それに付随する乗数部分加群層 E(h)が連接になることは，私と細野元気氏との共同研究及び私の研究で証明されていた．他にもいくつか限定的な場合，例えば h が正則切断から自然に作られる計量である場合や, h がある解析的部分集合を除いて通常の滑らかな中野正値計量となる場合などは，E(h)の連接性について知られていたが，h が単に一般の Griffiths 正値な特異エルミート計量であるという状況では，E(h)の連接性については知られていなかった.

(2) 大沢-竹腰の L^2 拡張定理は複素解析学における非常に重要で基本的な定理であり，広範な応用を持つことが知られている．大沢氏と竹腰氏によって最初に L^2 拡張定理が証明されたときは，主定理の L^2 評価式の不等式は最良なものではなかった（これでもほとんどの場合で応用上問題ないどころか，非常に強力な結果であることは述べておく）．この L^2 不等式を最良なものにするという問題は，分野の最も重要な問題の一つとして位置し続けたが，2010 年代初めに Blocki 氏と Guan—Zhou 氏によって，完全に解決された．Guan—Zhou はその論文内で，計量 h=e^{-φ}が半正値（φが多重劣調和関数）であれば大沢-竹腰の最良 L^2 拡張定理が成り立つということだけでなく，逆に最良 L^2 拡張定理が成り立てば，φが多重劣調和関数となるという原理を発見した．これは，L^2 拡張定理の逆が成り立つということで，つまり計量 h=e^{-φ}が半正値であることと，h に関して最良 L^2 拡張定理が成り立つことが同値であることを示している．彼らはこの性質を使うことで，Berndtsson によって示されていた相対ベルグマン核の log 多重劣調和性に対して非常に簡明な証明を与えることに成功した．またその後，Hacon—Popa—Schnell は，この性質を minimal extension property と名付け，代数幾何学にも応用することに成功した.

２．研究の目的
(1) 層の連接性を解明することは重要である．Nadel は乗数イデアル層の連接性を証明するにあたり，ヘルマンダーの L2 評価法を利用した．同様に，ベクトル束の特異エルミート計量が中野正値である場合，ヘルマンダーの L2 評価法を使うことで，付随する乗数部分加群層の連接性が証明できる．しかし，Griffiths 正値な計量に対しては，計量が滑らかであっても L2 評価が成立しないことが知られているため，Nadel のアプローチをそのまま適用することは難しい．そのため，本質的に新しいアプローチが必要となる点でも，重要な問いである.

(2) 計量がより強い正値性を持てば，それに応じてより良い L^2 評価が得られることが知られていた．これは sharper estimate と呼ばれ，細野元気氏，菊池翔太氏，Xu—Zhou 氏等によって系統的に研究されてきた．前述した minimal extension property が，``最良 L^2 拡張定理が出来ること”と``計量の半正値性”の同値性を主張していたことを踏まえると，``計量に関してどれだけ良い L^2 評価が出来るか”ということと，``計量の曲率がどれだけ正値であるか”ということに自然な（定量的な）対応関係があることが示唆される．これは minimal extension property を包含した一般的な結果であり，この関係を解明することは理論上も応用上も非常に重要である.

３．研究の方法
(1)　ヘルマンダーの L^2 評価法を適用する．そのままの状況では適用できないため，計量 h の det h の特異点が孤立しているという状況で問題の解決を試みる．det h の特異点が孤立している場合，元の計量 h に det h をかけてもその特異点以外では計量の特異性は変わらないという性質がある．この性質に加えて，Demailly--Skoda の定理を応用することを考える．Demailly–Skoda の定理とは，滑らかな計量 h が Griffiths 正値であるとき，h det h が中野正値となることを主張する定理である．Demailly–Skoda の定理は滑らかな計量に対してしか確立されていな

いため，ある種の近似の理論を考えることで，これを特異エルミート計量の場合にも適用する．上記 2 つの方法を組み合わせることで，課題の解決を試みる．

(2) L^2 拡張指数という概念を導入し，大沢竹腰の L^2 拡張定理がどれだけ良い評価で成立しているかという指標として用いる．簡単のため領域の次元が 1 の場合に限って説明するが，具体的には，点 a，半径 r に関する L^2 拡張指数 L(a,r)を，

L(a,r)=1/πr^2 K(a)

で定義する．ここで K(a)は点 a 中心半径 r の円板上の weighted Bergman 核の点 a での値である．これはつまり，点 a で値 1 という値を与えたとき，f(a)=1 を満たす全ての円板上の正則関数を考えたときの L^2 拡張定理に出てくる不等式の（適切に正規化したときの）最も小さな値に対応している．例えば，計量 h=e^{-φ}が半正値，つまりφが多重劣調和関数の場合，前述した最良 L^2 拡張定理の結果から，L がどこの点でも 1 以下であることが従う．また，minimal extension property とは，計量が半正値であることと，L^2 拡張指数 L が 1 以下（L≦1）であることが同値であるという主張と等価である．この L^2 拡張指数を導入したことで，どれだけ L^2 評価がより良く出来ているかということが表現できるようになった．例えば L<1 であることは，その点のまわりでは sharper estimate が成り立っていることを意味している．この L^2 拡張指数を使って，計量の曲率がどれだけ正値であるかということと L^2 拡張定理がどれだけ良く成立するかということの間に存在する関係を，定量的に考察した．

４．研究成果

(1)　まず，特異計量版の Demailly-Skoda の定理を証明することに成功した．具体的には，h が Griffiths 半正値な特異計量であるとき，h det h に関して最適な形で（捻れ型の）ヘルマンダーの L^2 評価式が成り立つことを証明した．計量が滑らかな場合，その計量に関して最適な形でヘルマンダーの L^2 評価が成り立つことと，その計量が中野半正値であることが同値であることが知られている．つまり上述した結果は，特異計量の枠組みでも Demailly-Skoda の定理が成り立つことを示唆している．それと同様に，h det h だけでなく，S^m h det h（ここで S^m は m 階対称テンソル積）に関しても最適な形でヘルマンダーの L^2 評価が成り立つことを証明した．

この結果を応用することで，Griffiths 正値な特異エルミート計量 h の det h の特異点が孤立している場合，それに付随する乗数部分加群層が連接層になることを証明することができた．加えて，h の m 階対称テンソル積 S^mh に付随する乗数部分加群層も連接となることが分かった．これらの系として，計量 h が球面対称性を持つ場合，対応する乗数部分加群層が連接となることも分かった．

(2)L2 拡張指数が 1 よりどれだけ小さいかということと，計量がどれだけ正値であるかということに定量的な関係があることを解明した．具体的には，各点 a に対し，ある正定数γ_a と[0, γ_a]上定義された非負下半連続関数 g_a が存在し，

L(a,r)≦exp(-g_a(r)r^2)

が成り立つならば，

i ddbar φ(a)≧2g_a(0)ω

が成り立つことを証明した．ここでωは標準的なケーラーフォームである．これは L^2 拡張指数が 1 よりどれだけ小さいか，その挙動に応じて関数の曲率の正値性が分かるということを示している．またこの系として，任意のε>0 に対して

L(a,r)≦exp(-max{(g(a)-ε)/2,0}r^2)

が成り立つことと，

i ddbar φ(a)≧g(a)ω

が成り立つことが同値であることを証明した．これは，上で得た結果が最良のものであることを意味している．

加えて，L^2 拡張指数をベクトル束の計量に対しても定義し，上述した対応をベクトル束に対しても一般化することに成功した．つまり，ベクトル束上の計量に関してより良い L^2 評価が出来れば，それに応じて計量が正値になることを証明した．この結果を順像層の計量の正値性の研究に応用することにも成功した．

一方で，大沢竹越の L^2 拡張定理がより良く``できない”ことと，計量が``多重調和関数”になることが同値であることを証明した．具体的には，関数φに対して

i ddbar φ=0

が成り立つことと，

L=1,

つまり，各点からの正則関数による L^2 拡張を考えたとき，最良係数の L^2 不等式を満たす正則関数はその等号を成立させるような唯一のものしか存在しないことが同値であることを証明した．これに関しては，当初は滑らかな関数に対してのみ証明しただけだったが，後に連続関数であっても，この対応関係が成立することを証明した．また，特に連続性を課さない一般の場合

においても，この対応が成り立つということを予想として提出した．この予想は，比較的最近肯定的に解決されたという情報が国外の研究者によって発表された．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計5件（うち査読付論文　5件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　4件）

１．著者名 INAYAMA TAKAHIRO	４．巻 248
２．論文標題 SINGULAR HERMITIAN METRICS WITH ISOLATED SINGULARITIES	５．発行年 2022年
３．雑誌名 Nagoya Mathematical Journal	６．最初と最後の頁 980～989
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1017/nmj.2022.16	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 Inayama Takahiro	４．巻 284
２．論文標題 Pseudonorms on direct images of pluricanonical bundles	５．発行年 2023年
３．雑誌名 Journal of Functional Analysis	６．最初と最後の頁 109916～109916
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jfa.2023.109916	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 Inayama Takahiro	４．巻 9
２．論文標題 Nakano positivity of singular Hermitian metrics and vanishing theorems of Demailly-Nadel-Nakano type	５．発行年 2022年
３．雑誌名 Algebraic Geometry	６．最初と最後の頁 69～92
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.14231/AG-2022-003	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 Hosono Genki、Inayama Takahiro	４．巻 32
２．論文標題 A remark on characterizations of Griffiths positivity through asymptotic conditions	５．発行年 2021年
３．雑誌名 International Journal of Mathematics	６．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0129167X21500877	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

1．著者名 Inayama Takahiro	4．巻 32
2．論文標題 Optimal L^2-Extensions on Tube Domains and a Simple Proof of Prekopa ' s Theorem	5．発行年 2021年
3．雑誌名 The Journal of Geometric Analysis	6．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s12220-021-00796-w	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計8件（うち招待講演　8件／うち国際学会　1件）

1．発表者名 稲山貴大
2．発表標題 大沢-竹腰の拡張定理から見るBrunn-Minkowskiの定理
3．学会等名 東工大幾何セミナー（招待講演）
4．発表年 2022年

1．発表者名 Inayama Takahiro
2．発表標題 Singular Demailly-Skoda theorem
3．学会等名 Pacific Rim Complex and Symplectic Geometry Conference, Kyoto, 2022（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2022年

1．発表者名 稲山貴大
2．発表標題 L^2-extension index and its applications
3．学会等名 複素解析幾何セミナー（招待講演）
4．発表年 2022年

1．発表者名 稲山貴大
2．発表標題 A complex analytic approach to Prekopa's theorem
3．学会等名 福岡大学微分幾何セミナー（招待講演）
4．発表年 2023年

1．発表者名 稲山貴大
2．発表標題 Optimal L^2-extensions on tube domains and a simple proof of Prekopa's theorem
3．学会等名 TMU Geometry Seminar（招待講演）
4．発表年 2021年

1．発表者名 稲山貴大
2．発表標題 孤立特異点を持った特異エルミート計量について
3．学会等名 静岡複素解析幾何セミナー（招待講演）
4．発表年 2021年

1．発表者名 稲山貴大
2．発表標題 管状領域上の最良L^2拡張定理とPrekopaの定理の簡単な証明
3．学会等名 函数論シンポジウム（招待講演）
4．発表年 2021年

1．発表者名 稲山貴大
2．発表標題 Singular Hermitian metrics with isolated singularities
3．学会等名 多変数関数論冬セミナー（招待講演）
4．発表年 2021年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関