

令和 6 年 5 月 13 日現在

機関番号：32689

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2021～2023

課題番号：21K20339

研究課題名（和文）二次超曲面と射影空間を特徴づける対数的シンプレクティック構造の構成

研究課題名（英文）Constructions of log symplectic structures which characterize quadric hypersurfaces and projective spaces.

研究代表者

奥村 克彦（Okumura, Katsuhiko）

早稲田大学・理工学術院・講師（任期付）

研究者番号：30906665

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,400,000 円

研究成果の概要（和文）：本研究課題「二次超曲面と射影空間を特徴づける対数的シンプレクティック構造の構成」に関連する研究として、(1)SNC対数的シンプレクティック構造を持つ4次元ファノスクロールの研究、(2)V-NC対数的シンプレクティック構造を持つ代数的スタックのトーリック性の研究を行った。(1)は一つの種類の多様体を除いて分類を得ている。残り一つの場合が解決し次第論文にまとめる予定である。(2)は元々の予想よりも広いクラスが当てはまることが分かり、予想を改良することができた。一方で、改良された予想を証明するには未だギャップが残っている段階である。

研究成果の学術的意義や社会的意義

射影的既約シンプレクティック多様体の構成は古くから興味を持たれているが、新たな構成法を見つけることができていない。本研究はその一般化である対数的シンプレクティック構造の構成法について新たな知見を加えた。SNC対数的シンプレクティック構造を持つ4次元ファノスクロールの研究では、対数的シンプレクティック構造まで拡張してもほとんどの多様体上に存在しないことを示せた。一方で、V-NC対数的シンプレクティック構造を持つ代数的スタックのトーリック性の研究では、新たな例を見つけることができた。とくに後者の結果は今後シンプレクティック多様体の新たな構成法という問の解決に寄与し得ると考えている。

研究成果の概要（英文）：As studies related to the research topic “Composition of logarithmic symplectic structures characterizing quadratic hypersurfaces and projective spaces,” (1) study of 4-dimensional Fano scrolls with SNC logarithmic symplectic structures, (2) study of V-NC logarithmic symplectic structures on algebraic stacks with V-NC logarithmic symplectic structures. Classification has been obtained for (1) except for one case. I will write a paper as soon as the remained one case are solved. For (2), a wider class than originally expected was found to be applicable, and we were able to improve the conjecture. On the other hand, there are still gaps to complete to prove the improved conjecture.

研究分野：代数学

キーワード：ポアソン構造 対数的シンプレクティック構造 ファノ多様体 射影空間

## 1. 研究開始当初の背景

非退化な2形式であるシンプレクティック形式に退化を許すという一般化によってポアソン構造は定義される。正則シンプレクティック形式を持つ射影多様体は例の構成法でさえ計4通りしか知られていない。そこでシンプレクティックの場合との比較から、最小の退化を許容した場合、すなわち退化領域が被約な因子である対数的シンプレクティック構造でありさらに退化因子の特異点が最もマイルドな場合、についてこれまでは研究されてきた。先行研究である Lima-Pereira の 2014 年の論文では、単純正規交差 (SNC) 対数的シンプレクティック構造を持つピカル数 1 の多様体が射影空間に限ることが示された。その他の先行研究を含めても、退化を制御したポアソン構造の例を構成できた多様体は射影空間  $\mathbb{P}^n$  からの派生に限られたため、退化因子に許容する特異点を広げていく必要があった。

研究計画の開始前の時点で二次超曲面上のポアソン構造の例は、階数が 2 以下という自明な例は構成できていた。一方で、多様体が 4 次元だとしても、階数が 4 のポアソン構造の構成法は知られていなかった。

## 2. 研究の目的

シンプレクティックの例の構成法が 4 通りしか知られていないように、ポアソン構造を持つという条件は多様体に制限を課す。さらに、退化の仕方にも条件を与えることで、ますます持ち得る多様体は限られていく。

本研究の抽象的な目的は以下の通りである。構成法の知られていない多様体上でポアソン構造の例を構成する。さらに、多様体の特徴づけとポアソン構造の退化の性質を関連させることで、ファノ多様体の研究とポアソン構造の研究を結びつける。具体的には、二次超曲面について上記の目標を達成することを計画していた。

本研究計画を達成した場合、射影空間上にしか例を作れない SNC 対数的シンプレクティック構造よりもより広くてなおかつ制御可能なポアソン構造のクラスを与えることができると期待していた。

## 3. 研究の方法

以下の①, ②, ③の研究に取り組んだ。

### ①二次超曲面を特徴付けるポアソン構造の構成

#### ①-1 射影空間 $\mathbb{P}^4$ 上の全てのポアソン構造がなすモジュライ空間の研究

#### ①-2 既存の射影空間と二次超曲面の特徴づけのポアソン構造の観点への翻訳

#### ①-3 $Q^4$ 上でのポアソン構造の構成法

#### ①-4 一般次元 $Q^{2n}$ への構成の一般化

#### ①-5 二次超曲面の特徴づけとの関連性の研究

スタック上の V-NC 対数的シンプレクティック構造の研究の方法

-1 スキームの一般化であるスタック上に具体的にポアソン構造を構成する

-2 -1 の例のようなポアソン構造の構成法を一般化する

-3 V-NC 対数的シンプレクティック構造の分類について予想を立てる

-4 既存の特徴づけと関連付けて予想を証明する

V-NC 対数的シンプレクティック構造とは、退化因子の持つ特異点が悪くとも V-NC 特異点である対数的シンプレクティック構造のことである。V-NC 特異点とは SNC 特異点のスタック化に相当する一般化である。上述の Lima-Pereira の一般化として、重み付き射影空間の特徴づけが得られるのではないかと見当をつけていた。

## 4 次元ファノスクロール上の SNC 対数的シンプレクティック構造の研究の方法

-0 既知の 4 次元ファノスクロールの分類表がすでに知られている

-1 各クラス毎に Pym の補題を適用し交点数の計算からポアソン構造の非存在性を確かめる

-2 -2 で非存在性が確かめられなかった場合は個別に対処する

## 4. 研究成果

・講演 3 件

(1) 「Classification of SNC log symplectic structures on blow-up of projective spaces」, 2023. 12, 上智大学数学談話会, 上智大学

(2) 「SNC log symplectic structures on blow up of projective spaces」, 2022. 3, Japanese-European Symposium on Symplectic Varieties and Moduli Spaces, 早稲田大学

(3) 「射影空間の爆発上の SNC ログシンプレクティック構造」, 2022.1, 対称性と幾何セミナー,

いずれも以前の研究が講演の主題ではあるが、最近の進展についても紹介した。

・研究⑩の進捗

ほどなくして研究 ⑨ と出会い、同じ精神の下での研究対象であり、なおかつ学術的意義が大きい上に研究⑩よりも手を付けやすいと判断し、元々の計画だった研究⑩は中断した。

・研究 ⑨ の進捗

-3 まで進捗している。研究開始時は  $V$ -NC 対数的シンプレクティック構造を持つという条件で重み付き射影空間を特徴付けられると期待していたが、偽重み付き射影空間上にも例を構成できることを確認できた。 $V$ -NC 対数的シンプレクティック構造を持つという条件から多様体がトーリックであることを導けるのではないかと予想をしている。しかし、-4 の退化の情報をトーリック多様体の特徴づけに結び付けるという部分が障害となっている。

・研究 ⑧ の進捗

-1 について、多様体がグラスマン  $(2,5)$  でない場合についてはポアソン構造の非存在性の証明が完了している。多様体がグラスマン  $(2,5)$  の場合の証明が完了次第、論文にまとめて査読付き学術雑誌に投稿する予定である。

5 . 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計0件

〔学会発表〕 計0件

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

世話人として研究集会を2回開催した。第3回宇都宮大学代数幾何学研究集会(2022年3月9日～3月11日)と第4回宇都宮大学代数幾何学研究集会(2023年2月28日～3月2日)である。前者はオンラインで開催し、後者は対面形式で開催した。後者の講演者の旅費の一部を本研究課題の直接経費または間接経費から支払った。

6 . 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7 . 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------