

令和 6 年 6 月 19 日現在

機関番号：32629

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2021～2023

課題番号：21K21290

研究課題名（和文）M凸関数最小化問題に対する高性能近似アルゴリズムの構築

研究課題名（英文）Development of approximation algorithms for M-convex function minimization

研究代表者

南川 智都（Minamikawa, Norito）

成蹊大学・理工学部・助教

研究者番号：80911700

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,000,000円

研究成果の概要（和文）：M凸関数は解きやすい離散最適化問題を統一的に扱うための理論的枠組みとして知られている。M凸関数の最小化問題は、最小全域木問題、分離凸資源配分問題といった離散最適化問題の一般化として知られ、適切に定めた近傍内で最も関数値が減少する最急降下方向の情報を利用して最適解を得ることができる。本研究では、最急降下方向が必ずしも得られない状況において、解の精度が保証されたアルゴリズムの構築を目指した。その結果、M凸関数最小化問題と関連したジャンプシステム上の分離凸関数最小化問題について、ある種の最急降下法が測地線性質をもつという興味深い結果を得ることができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

M凸関数最小化問題に対するアルゴリズムの多くは、近傍内で最も関数値が減少する最急降下方向の情報を利用して、現実の問題では最急降下方向を求めることが困難な状況が起こりうる。最終的に得られた結果は想定と異なるものになったが、ジャンプシステム上の分離凸関数最小化という多くの実行可能領域を表現可能な問題クラスについて理論的な成果が得られ、解きやすい離散最適化問題の離散構造の理解に貢献できたと考えられる。

研究成果の概要（英文）：The concept of M-convex functions is a theoretical framework to solve discrete optimization problems in a unified manner. The minimization problem of M-convex functions can be regarded as a generalization of discrete optimization problems, such as the minimum spanning tree problem and the separate convex resource allocation problem. The optimal solution of M-convex function minimization can be obtained by using information on the steepest descent direction in which the function value decreases most within an appropriately defined neighborhood. In this study, we aimed to construct an algorithm that guarantees the solution's accuracy in situations where the steepest descent direction is not always available. As a result, we obtained an interesting result: the steepest descent algorithm has geodesic property for the problem of separable convex function minimization on jump systems, which is related to M-convex function minimization.

研究分野：離散最適化

キーワード：離散凸関数 離散凸解析 離散最適化 アルゴリズム M凸関数 ジャンプシステム

1. 研究開始当初の背景

離散値の変数を扱う最適化の分野において、現実に現れる計算困難な問題を解くために、「解きやすい」問題に対する理解を深めることは重要である。解きやすい非線形離散最適化問題を統一的に扱うための理論的枠組みとして提唱されたのが、室田氏(統計数理研究所・東京都立大学)による「離散凸解析」である。離散凸解析において、M凸関数は中心的な役割を担う離散凸関数の概念である。M凸関数最小化問題は(ポリ)マトロイド上の線形関数最小化問題や、最小全域木問題、分離凸資源配分問題といった離散最適化問題の一般化として知られ、高速に最適解を求めるアルゴリズムが研究されている。

M凸関数は「適切に定めた近傍内で解の関数値が最小となることが、大域的最適解となることを保証する」という離散凸関数としてふさわしい性質を持つ。そのため、M凸関数最小化問題では、近傍内で最も関数値が減少する最急降下方向へ解の更新を繰り返す最急降下法が有効である。近年の理論研究の発展により、M凸関数に対する最急降下法の厳密な反復回数が、初期解から最適解までのL1ノルムによって与えられることが明らかになった。この最急降下法は厳密解法であるため、アルゴリズムを有限回繰り返すことで最適解を求められるが、現実では解の精度を多少落としてもより高速に解を得たいという状況が起こりうる。離散凸解析におけるアルゴリズムをより使いやすいものにするため、最急降下法とは異なる近似解法を提案することが、本研究の開始当初の背景である。

2. 研究の目的

M凸関数最小化問題に対する多くのアルゴリズムにおいては、現在の解の値が最も減少する最急降下方向が各反復で繰り返し利用されている。しかし、現実の問題では、観測値に誤差が生じる、関数値を求めるためにコストがかかる、といった理由から最急降下方向を厳密に求めるのが困難な状況が起こりうる。本研究では、最急降下方向の探索が困難という状況を想定し、計算時間および解の品質が理論的に保証された近似アルゴリズムの構築することを目的とした。これは離散凸解析における新たな試みであるが、離散凸解析の分野だけでなく、M凸関数最小化問題と関係した離散最適化問題全般に新たな知見をもたらすことが期待された。

3. 研究の方法

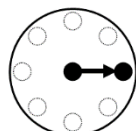
本研究では、M凸関数最小化問題に対して、各反復で近傍内における近似解へ解の更新を繰り返す、という近似降下法を新たに提案し、計算時間と解の品質が保証されたアルゴリズムの構築を目指していた。近傍内における厳密な最適解へ解の更新を繰り返す最急降下法では、生成される解が最短距離で最適解に接近する。一方で、近似降下法では最適解に最短距離で解が移動するとは限らないが、最急降下法よりも必要な近傍内の解の情報は減り、各反復で関数値が減少することのみを保証する降下法に比べて短時間で良い解が得られることが期待できる。

当初想定していた予定は以下の通りであった。まず、各反復において近似率が理論的に保証された解が得られる、という状況を仮定し、最終的に得られる解の品質と反復回数を解析する。近似降下法において、最急降下法で最適解を得るまでにかかる反復回数と同程度の解の更新を行い、出力解の品質を評価する。各反復で更新先となる近似解の近似率を変化させることで、出力解の品質がどのように変化するかを分析する。さらに、アルゴリズムの反復回数を増減させた場合に、出力解の品質の変化を調べる。ただし、一般的なM凸関数最小化問題では、各反復において近傍内における近似解が容易に得られるとは限らないため、最終的には関数値の期待値が保証される近似解の探索回数を解析し、アルゴリズムが最終的に出力する解の関数値の期待値が理論的に抑えられることが保証された確率的アルゴリズムの構築を目指す予定であった。

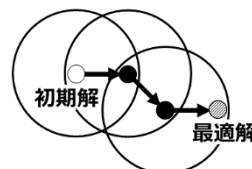
以上の計画が予定通り進まない場合、以下の打開策も検討していた。

- ・ M凸関数の特殊ケースかつ比較的扱いやすい関数である分離凸関数の最小化問題を考える。
- ・ 近似降下法を用いて計算機実験を行い、実際の関数値の変化を評価する。

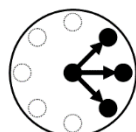
最急降下法(既存手法)



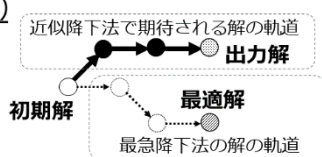
アルゴリズムの各反復で 近傍内の最小解に移動 解の更新を繰り返すことで最短距離で最適解に到達



近似降下法(提案手法)



アルゴリズムの各反復で 近傍内の近似解に移動 反復回数・出力解の品質は?



4. 研究成果

本研究の研究期間は2年間の予定であったが、初年度からコロナ禍の影響を大きく受け、最終的に3年間に延長された。また、当初想定した以上にアルゴリズムの解析が難しく、計画していた研究成果は得られなかったが、打開策である分離凸関数の最小化問題を様々な実行可能領域について考えているうちに、M凸関数最小化問題と深く関連したジャンプシステム上の分離凸最小化問題について興味深い成果を得ることができた。以下、各年度の成果を詳しく述べる。

2021年は主な研究対象としているM凸関数最小化問題について、最急降下方向の情報を利用しない降下法の構築を考え、高性能なアルゴリズムの構築や反復回数の解析を試みた。各反復で近似率が保証された解が得られた状況を仮定した上でアルゴリズムの解析を試みたが、部分的な降下方向の情報のみで最適解や近似解に効率的に到達することが難しく、新たな成果は得られなかった。しかし、検討・考察を重ねたことで、問題に関する理解は進んだ。打開策として分離凸関数や二次関数といった、M凸関数の部分クラスとして知られる関数についてアルゴリズムの構築・解析を進めた。特に、目的関数が分離凸関数の場合については、一般的な状況における降下法の挙動は明らかになっていないが、様々な扱いやすい性質を持つことから、特定の状況下における具体的な挙動が解析できた。

目的関数が分離凸関数となるケースについて深い理解を得るため、関連問題としてジャンプシステム上の分離凸関数最小化問題に対するアルゴリズムの考察も行った。この問題は1995年に安藤氏・藤重氏・内藤氏の3名によって提案されたある種の最急降下法で最適解が得られることが知られているが、降下方向の選択の自由度が高いことが原因で、最適解に最短距離で到達できないケースが存在した。このアルゴリズムについて検討を重ね、降下方向を特殊化することで、最短距離で最適解まで到達することが保証できるのではないかと、という予想をした。

2022年は引き続きジャンプシステム上の分離凸関数最小化問題に対するアルゴリズムの考察を行った。本年度は安藤氏らによるある種の最急降下法を精緻化することで、初期解から最適解に遷移することが保証されるという測地線性質の証明を進めた。この問題は複雑な離散構造を持つため、従来の離散凸解析において用いられた証明方法とは異なる方法を提案した。この結果について学会発表を行い、専門家と議論を重ねることで、問題に対する理解を深めるとともに、証明の一部に不備があることを発見できた。証明の不備については修正を行い、成果をまとめて論文誌に投稿した。

また、ジャンプシステム上の分離凸関数最小化問題に対して、以下の問いの答えを検討した。

(1) 測地線性質を持つ別種の貪欲アルゴリズムや最急降下法が構築可能か

(2) 局所解について一部の情報が得られない場合について、反復回数を抑えることが可能か

(1)について別種の最急降下法の測地線性質を検討したが、この時点では分からなかった。限定されたケースでは既に得られた結果から測地線性質をもつことが言えたものの、一般的なケースについては既存の最急降下法で行った証明方法を用いてもうまくいかず、他の証明方法を検討していた。(2)についても一般的な状況において反復回数をうまく抑えられるかは明らかになっていないが、検討を重ねることで問題に対する理解を進めることができていた。

2023年もジャンプシステム上の分離凸関数最小化問題に関するアルゴリズムについて考察を行い、以下の興味深い結果を得ることができた。

■結果1

安藤氏らの最急降下法の精緻化版アルゴリズムについて測地線性質の証明を完成させた。最終的に複雑かつ長い証明のため、専門家との議論や論文の査読において多くの指摘をうけたが、証明の可読性向上のための大幅な修正を行い、最終的にこの結果は査読付き論文誌 *Discrete Applied Mathematics* に掲載された。

■結果2

昨年度に課題となった測地線性質を持つ別種の貪欲アルゴリズムや最急降下法が構築可能かという問いについて、別種の最急降下法を考え、アルゴリズムが測地線性質をもつかを検討した。この結果についてはまとめることができなかったものの、別種の最急降下方向により最適解の存在する範囲を制限可能であるという結果を得た。

結果2と既存の最小解カット定理を利用することで、近傍内の解の複数の情報を利用して最適解の存在範囲を制限できる。また、現在考えている目的関数と比較して、近傍の解の情報が近くなるような新たな目的関数を考えた場合、最適解の存在する領域を同様に制限することが可能で、新たな目的関数の最適解を得るためのより良い初期解が得られるのではないかと考えられる。このアイデアをもとに新たな研究課題に2023年度から取り組んでおり、本報告書に記載した成果をいかして研究を進めている。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Minamikawa Norito	4. 巻 344
2. 論文標題 Geodesic property of greedy algorithms for optimization problems on jump systems and delta-matroids	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Discrete Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 43 ~ 67
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.dam.2023.11.003	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計2件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 南川 智都
2. 発表標題 ジャンプシステムおよびデルタマトロイド上の最適化問題に対する貪欲アルゴリズムの測地線性質
3. 学会等名 日本応用数理学会 2022年度 年会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 南川 智都
2. 発表標題 ジャンプシステムおよびデルタマトロイド上の最適化問題に対する測地線アルゴリズムの構築
3. 学会等名 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2022年秋季研究発表会
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------