

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 4 月 25 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(A)

研究期間：2010～2013

課題番号：22244001

研究課題名(和文)代数多様体のコホモロジーとガロワ表現

研究課題名(英文)Cohomology of algebraic varieties and Galois representations

研究代表者

斎藤 毅 (Saito, Takeshi)

東京大学・数理(科)学研究科(研究院)・教授

研究者番号：70201506

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 14,900,000円、(間接経費) 4,470,000円

研究成果の概要(和文)：分岐理論において非対数版が対数版より幾何的には重要とわかったので、 $l$ 進層の特性サイクルの理論の非対数版を余次元1以下で構築した。曲線への制限の方法が有効であることを示し代数多様体の射の非輪状性を証明した。

代数曲面の場合に、ラドン変換やペンシルという大域的な方法を組み合わせて、特性サイクルを曲面全体で定義し、オイラー数の公式と消失輪体のミルナー公式の類似を証明した。2次元ではあるものの、高次元での $l$ 進層の特性サイクルの理論を構築するという目標を実現した大きな成果である。

このほか、偶数次元の多様体の $l$ 進コホモロジーが定めるガロワ表現の行列式表現や第2 Stiefel-Whitney類も研究した。

研究成果の概要(英文)：I find that non-logarithmic version is geometrically more important than the logarithmic one in ramification theory. I constructed the non-logarithmic theory of the characteristic cycle of an  $l$ -adic sheaf in codimension at most 1. Using the method of cutting by curves and established acyclicity of morphisms of varieties.

For a sheaf on a surface, I defined the characteristic cycle everywhere on the surface and proved a formula for the Euler number and an analog of the Milnor formula on vanishing cycles. Though limited to surfaces, this is a significant result achieving the aim to construct a theory of characteristic cycles in higher dimension.

I also studied the determinant and the second Stiefel-Whitney class of the Galois representation defined by  $l$ -adic cohomology of a variety of even dimension.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：数論幾何学 分岐理論  $l$ 進層 特性サイクル ガロワ表現

### 1. 研究開始当初の背景

スキームと層の分岐理論の基本的な問題は、分岐から生じる局所的な不変量を構成し、それを使って大域的な不変量を表す公式を証明することである。1 進層のオイラー数については、エタール・コホモロジーの理論の創始期に、代数閉体上の代数曲線の場合に、分岐から定まる局所的な不変量であるスワン導手で表す Grothendieck-Ogg-Shafarevich の公式が証明されている。

この公式の代数曲面への拡張についての Deligne-Laumon による部分的な結果と、局所体上の代数曲線の 1 進コホモロジーのスワン導手についての Bloch の導手公式が 80 年代半ばまでに証明されたが、それ以降 2000 年頃までは大きな進歩が見られなかった。

こうした状況を大きく転換したのが、Abbes 氏との共同研究による剰余体が非完全な局所体の分岐群の定義や、加藤和也氏との共同研究による局所体上の高次元の多様体の Bloch の導手公式の証明である。これ以降、この分野の研究が大きく進みはじめ、研究開始当初には 1 進層のオイラー数に関する Grothendieck-Ogg-Shafarevich の公式の高次元への拡張や特性類の定義、さらには分岐理論を用いた、特性サイクルの対数版の理論が構築され始めていた。

### 2. 研究の目的

正標数の代数多様体上の 1 進層の特性サイクルを分岐理論の方法によって定義し、その基礎理論を確立するのが最大の目標である。以前の研究で、余次元 2 以上の点を除けば対数版の定義はできていたので、これを余次元が高い点へ拡張することが問題である。

正標数の場合に限らず、より整数論的に重要な混標数の場合への拡張もめざす。このほか分岐理論の、整数論、数論幾何への応用を探る。

### 3. 研究の方法

本研究は純粋数学の理論的研究であるので、紙とペンを手に試行錯誤を重ね思索を深めるのが基本的方法である。背景を異にする研究者の発想を学ぶことは研究を進めるために欠かせないので、研究集会を開催したり参加したりあるいは研究者を招聘したり訪問したりする機会を積極的に作り、研究上のさまざまな課題について議論をする。

### 4. 研究成果

2011 年夏以来の Deligne 氏との交流を通じ、彼の研究を学ぶなかで、それまでは比較的重要でないと考えていた非対数版の方が対数版よりも幾何的には重要であるという認識に達したことがきっかけとなり、分岐理論の非対数版の研究を進めた。

非対数版では対数版と異なり、分岐因子の重複度の係数の分母の処理が問題となる。2012 年 9 月の IHES 滞在中に、トーラスの作用を

用いた新しい局所化の方法を導入し、この問題を解決した。これを使って非対数版についても対数版と同様な理論を構築し、まず特性サイクルの理論を余次元 1 以下で整備した。非対数版の大きな利点として、曲線への制限の方法が有効であることを示した。さらにその応用として、Deligne と Laumon の半連続性から代数多様体の射の非輪状性を導いた。これは、代数多様体のスムーズな射がひきおこす余接束の射の像と、特性サイクルとの交点が 0 切断に含まれるならば、ミルナー・チューブ上のコホモロジーが 0 になるという、特性サイクルの台を特徴づける性質である。また強い仮定のもとではあるが特性サイクルのコホモロジー類が以前構成した特性類と一致することも証明した。仮定は層の分岐が分岐因子の生成点での分岐でいたるところ一様に統制され、しかも分岐の重複度が各既約因子ごとに一定であるという条件である。ここでも非対数版では重複度の係数の分母の処理が問題となるが、分類空間のスタックとしてのコホモロジーを使う新しい手法により、問題を解決した。

以上の成果により、課題は余次元 2 以上の点の扱いとなった。代数曲面の場合には、有限個の閉点となる。この場合にはさらに Beilinson によるラドン変換の方法や Deligne によるペンシルをもちいた大域的な方法などの幾何的方法を組み合わせ、特性サイクルを曲面全体で定義した。このサイクルを使って、オイラー数の公式と消失輪体の全次元についてのミルナー公式の類似を証明した。これは 1980 年前後の Deligne と Laumon が証明した代数曲面上の 1 進層のオイラー数の公式では仮定されていた余計な条件を完全に取り除くものである。これは 2 次元という仮定はあるものの、高次元の多様体上の 1 進層の特性サイクルの理論を構築するという研究目標を実現した大きな成果である。

この証明の技術的なポイントは、消失輪体の空間が曲線への射を少し変形しても変わらないという安定性を示すところである。ここでは、孤立特性点をブローアップして Eiki によるヘンゼルの補題の拡張を適用するという新しい方法と、ブローアップの極限では消失輪体が消失するというリジッド幾何からの着想をあわせて証明する。これは 2013 年 9 月の IHES 滞在中に見いだした方法である。この消失輪体の空間の安定性は孤立特性点でなければ反例があるという微妙な問題である。孤立特性点であるという仮定は曲線への射を少し変形しても消失輪体の空間の次元は変わらないという性質を示すところを使う。この技術的に重要なステップの証明で、Deligne と Laumon により証明され、加藤和也によって拡張された消失輪体の空間の次元公式を使う。

このほか分岐理論の整数論への応用として、偶数次元の多様体の1進コホモロジーが定めるガロワ表現について、射影空間内の超曲面の場合にはその行列式表現が定める2次拡大が定義方程式の判別式の平方根で表わせることを証明した。

普遍族の場合には底空間の不分岐2次被覆の種類が著しく少ないことを使い、この場合に帰着させることで証明する。定義体を実数体の場合には位相的な議論を使い、さらに退化する場合にはピカル・レフシェツの公式を適用することで証明を完成する。

定義体の標数が2のときには、この2次拡大を定義するアルティン・シュライアー方程式の判別式による記述も与えた。

超曲面とは限らない偶数次元の多様体に対し、その1進エタール・コホモロジーが定める直交ガロワ表現の第2 Stiefel-Whitney類が de Rhamコホモロジーの Hasse-Witt類で表せるという予想を定式化した。定義体が局所体の場合には、準安定な退化をもつ場合にはなりたつことを証明した。ここでは、重さスペクトル系列を用いる。定義体が絶対不分岐なp進体のときにはp進コホモロジーに対してなりたつことも証明した。ここでは、ねじれ係数のp進ホッジ理論の Fontaine-Laffailleの理論を使う。定義体を実数体の場合には、通常のホッジ理論を使って証明する。定義体が標数0の代数閉体を含む場合には、複素多様体に解析的に扱うことで証明する。これらをすべてあわせ、さらに普遍族を使った議論により、射影空間内の超曲面の場合になりたつことも証明した。

完全体上の多様体上の1進層については、以前の加藤和也氏との共同研究で、そのSwan類を定義し、オイラー数の公式を証明していた。局所体上の多様体の1進層に対しても、局所化された交点理論を使って、そのSwan類を定義した。さらに開多様体についての対数的Lefschetz跡公式を証明しその応用として、Riemann-Roch型の公式を証明した。この結果をまとめた加藤和也氏との共著論文を完成し出版したことも大きな成果である。

##### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 9件)

Kazuya Kato, Takeshi Saito,  
Ramification theory for varieties over a local field, Publ. Math., IHES. 117, (2013), 1-178.

DOI: 10.1007/s10240-013-0048-z

Takeshi Saito, The determinant and the discriminant of a hypersurface of even dimension. Math. Research Letters. 19 (2012), 855-871.

DOI:

<http://dx.doi.org/10.4310/MRL.2012.v19.n4.a10>

Takeshi Saito, The second Stiefel-Whitney classes of l-adic cohomology, J. für die reine und angewandte Math., 2013, Issue 681, 101-147,

DOI: 10.1515/crelle-2012-0035

Ahmed Abbes, Takeshi Saito,  
Ramification and cleanliness, Tohoku Math. J., Centennial Issue, 63 No. 4 (2011), 775-853.

doi:10.2748/tmj/1325886290

Takeshi Saito, Ramification of local fields with imperfect residue fields III, Math. Ann., 352, 3 (2012), 567-580.

DOI: 10.1007/s00208-011-0652-5

Anna Cadoret and Akio Tamagawa, A uniform open image theorem for l-adic representations II, Duke Math. J., 162, 2013,

DOI:10.1215/00127094-2323013

Mohamed Saidi and Akio Tamagawa, On the Hom-form of Grothendieck's birational anabelian conjecture in characteristic  $p>0$ , Algebra and Number Theory 5 (2011), no. 2, 131--184.

Anna Cadoret and Akio Tamagawa, Uniform boundedness of p-primary torsion of abelian schemes, Inv. Math., 2011; 188 (2012), no.1, 83-125.

DOI: 10.1007/s00222-011-0343-6

Anna Cadoret and Akio Tamagawa, On a weak variant of the geometric torsion conjecture, Journal of Algebra 346 (2011), no. 1, 227--247.

[学会発表](計 20件)

Takeshi Saito, Wild ramification of schemes and sheaves, 国際数学者会議 2010年8月27日ハイデラバード(インド)

Takeshi Saito, Wild ramification of schemes and sheaves, Pan Asian Number Theory Conference 2010年9月17日京都大学数理解析研究所

Akio Tamagawa, Representations of étale fundamental groups and applications (joint work with Anna Cadoret) Pan Asian Number Theory Conference 2010年9月13日 京都大学数理解析研究所

Takeshi Saito, Wild ramification of schemes and sheaves, Witt vectors, foliations, and absolute de Rham cohomology, 2010年11月24日 名古屋大学多元数理研究科

Takeshi Saito, Hasse-Arf theorem in higher dimension, Galois representations

in arithmetic and geometry 2010年8月11日  
ゴア(インド)

Takeshi Saito, An l-adic Riemann-Roch formula (joint work with Kazuya Kato), Regulators, III 2010年7月20日  
バルセロナ(スペイン)

齋藤 毅, l-進 Riemann-Roch 公式 (加藤和也氏との共同研究), 代数的整数論とその周辺, 2010年12月6日, 京都大学数理解析研究所

Takeshi Saito, Wild ramification of schemes and sheaves, Arithmetic and Algebraic Geometry 2011 Jan. 18-22.

齋藤 毅, 偶数次元の超曲面の判別式と行列式 仙台シンポジウム 8/2

Takeshi Saito, Discriminant and determinant of a hypersurface of even dimension (joint work with J-P. Serre) Une apres-midi de Geometrie Arithmetique a l'IHES 12 septembre, 2011

Takeshi Saito, Second Stiefel-Whitney class of l-adic cohomology, Geometrie Arithmetique et motivique, CIRM, 19 septembre 2011,

Takeshi Saito, Discriminant and the determinant of a complete intersection, Okinawa Shogaku, 10:00-11:20, Oct. 10, 2011, Workshop on arithmetic geometry 2011

Takeshi Saito, Discriminant and determinant of a hypersurface of even dimension (joint work with J-P. Serre), 2011 Japan-Taiwan Mini workshop on Arithmetic Algebraic Geometry and related topics, Nov. 17-19.

Takeshi Saito, Discriminant and determinant of a hypersurface of even dimension, Arithmetic and Algebraic Geometry 2012 Univ. of Tokyo, 2012 Feb. 17,

Takeshi Saito, Introduction to wild ramification of schemes and sheaves, Arizona Winter School 2012: Ramification and Geometry March 10-14, 2012, University of Arizona in Tucson

Takeshi Saito, The second Stiefel-Whitney class of l-adic cohomology, Galois Representations and Arithmetic Geometry, Institut de Mathematiques de Bordeaux, July 11 2012.

Takeshi Saito, Wild Ramification and the Cotangent Bundle, AMC 2013, Busan, July 3,

Takeshi Saito, Wild Ramification and the Cotangent Bundle, PANT (Pan Asia Number Theory) conference, VIASM, July 22-26

Takeshi Saito, Characteristic cycles of a constructible sheaf on a surface, Arithmetic and Algebraic Geometry 2014, 東大数理 2014年1月29日

Takeshi Saito, Characteristic cycles of

a constructible sheaf on a surface, Conference on Motives and Galois groups on the occasion of Uwe Jannsen's 60th birthday, March 12, 2014, University of Regensburg.

Takeshi Saito, Characteristic cycles of a constructible sheaf on a surface, Geometry & Arithmetic of Surfaces, March 18, 2014 LMU & TU Munich

〔図書〕(計 0件)

〔産業財産権〕  
出願状況(計 0件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
国内外の別:

取得状況(計 0件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
取得年月日:  
国内外の別:

〔その他〕  
ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

齋藤 毅 (SAITO Takeshi)  
東京大学・大学院数理科学研究科・教授  
研究者番号: 70201506

### (2) 研究分担者

玉川 安騎男 (TAMAGAWA Akio)  
京都大学・数理解析研究所・教授  
研究者番号: 00243105

### (3) 連携研究者

田口 雄一郎 (TAGUCHI Yuichiro)  
九州大学・数理学研究院・准教授  
研究者番号: 90231399

都築 暢夫 (TSUZUKI Nobuo)  
東北大学・理学研究科・教授  
研究者番号: 10253408

辻 雄 (TSUJI Takeshi)  
東京大学・大学院数理科学研究科・教授  
研究者番号: 40252530