様　式　C－19、F－19、Z－19　(共通)

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 27 年　 6 月　 1 日現在

機関番号： １２６０８
研究種目： 基盤研究(B)
研究期間： 2010～2014
課題番号： ２２３４０００３

研究課題名（和文）代数的サイクルの数論的および代数幾何学的研究

研究課題名（英文）Study of algebraic cycles in arithmetic and algebraic geometry

研究代表者
齋藤　秀司（Saito, Shuji）

東京工業大学・理工学研究科・教授

研究者番号：５０１５３８０４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　12,100,000円

研究成果の概要（和文）：当該研究では，代数的サイクルに関連する諸問題を多角的かつ有機的に究する．代数的サイクルとはスキーム上の既約閉部分スキームの整数係数の有限和である．この全体のなす群を有理同値で割った群はChow群と呼ばれる．Chow群の研究の歴史は長く，その重要性は代数幾何のみならず整数論においても深く認識されている．たとえば，19世紀の複素関数論の重要な研究対象であったリーマン面の因子類群や，整数論の重要な研究対象である代数体のイデアル類群はChow群の一種である．当該研究では，以上の背景のもとで，高次元類体論，高次元Hasse原理，モチフィックコホモロジーの有限性予想を研究し成果を挙げた．

研究成果の概要（英文）：The research consists of three parts:(I) Higher dimensional class field theory, (II) Cohomological Hasse principle, (III) Finiteness of motivic cohomology.

(I) We generalized higher dimensional class field theory of Kato-Saito by using Chow groups of zero-cycles with modulus and gives a proof of the rank-one case of a conjecture of Deligne-Drinfeld on the existence of smooth l-adic sheaves on varieties over finite fields. (II)We proved rthe prime-to-p part of the Kato conjecture on cohomological Hasse principle and gives several applications on various problems in arithmetic geometry; special values of zeta functions, and a generalization of higher dimensional class field theory in the framework of theory of motivic cohomology, and a geometric application to resolution of singularities. (III) We gave new contributions to the finiteness conjecture of motivic (co)homology of arithmetic schemes. It shows the finiteness of motivic (co)homology with finite coefficient of arithmetic schemes.

研究分野： 数論幾何学　代数幾何学

キーワード： algebraic cycles　motivic cohomology　Hasse principle　Class field theory

１．研究開始当初の背景

当該研究では，代数的サイクルに関連する諸問題を多角的かつ有機的に研究する．代数的サイクルとはスキーム上の既約閉部分スキームの整数係数の有限和である．この全体のなす群を有理同値で割った群は Chow 群と呼ばれる．Chow 群の研究の歴史は長く，その重要性は代数幾何のみならず整数論においても深く認識されている．たとえば，19 世紀の複素関数論の重要な研究対象であったリーマン面の因子類群や，整数論の重要な研究対象である代数体のイデアル類群は Chow 群の一種である．当該研究では，以上の背景のもとで，**高次元類体論**，高次元 Hasse 原理，モチフィックコホモロジーの有限性予想を研究した．

２．研究の目的

(1)**高次元類体論**：類体論はフェルマーとガウスの偉業を源とし 20 世紀前半に高木貞治と E. Artin により完成された整数論の礎で，大域体(有限次代数体あるいは有限体上の一変数関数体)の最大アーベル拡大のガロア群を，その体に内在的な情報(例えばイデアル類群)のみを用いて統制する理論である．類体論の高次元化とはこの理論を，有限生成体 (素体上高い超越次数を持つ関数体)へ拡張する理論である．これはスキーム論を用いて数論幾何学的問題として定式化される．整数環または有限体上有限型スキームを 数論的スキームと言う．これは有限生成体の幾何学化である．基本的問題は，数論的スキーム U のアーベル基本群 $\pi_1^{ab}(U)$ を U に内在的な幾何学的情報を用いて記述することである．1980 年代の加藤和也氏との共同研究により研究代表者は，代数的K理論を用いて上の問題へ 1 つの解答を与えることに成功した．当該研究の目的はこの結果を精密化，一般化することである．

(2)高次元 Hasse 原理：Hasse 原理とは，有理数体上の2次形式に対する局所大域原理(Hasse-Minkowski の定理)が源で，これを一般化した大域体上の中心的単純環(あるいはブラウアー群)にたいする局所大域原理は古典的類体論で重要な役割を果たす．1985 年に加藤和也はこれを高次元化する予想を提出した．数論的スキーム X と自然数 a,n にたいし加藤ホモロジー $KH_a(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ (次数 a，係数$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)が定義される．加藤ホモロジーは X の数論的性質を反映する重要な不変量である．上述の Hasse 原理は，「$X=\mathrm{Spec}(O_K)$ (O_Kは有限次代数体 K の整数環)あるいは有限体上固有的で滑らかな曲線 X にたいして $KH_1(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})=0$」という主張に同値である．加藤和也はこの事実を高次元化する次の予想を提出した．

予想１： Xを有限体上固有的で滑らかな多様体，あるいは整数環上固有的で正則なスキームとすると，全ての自然数 $a,n>0$ にたいし $KH_a(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})=0$

当該研究の目的はこの予想の解決である．

(3)モチフィックコホモロジーの有限性予想：モチフィックコホモロジー とは，代数多様体あるいはデデキント環上有限型なスキーム Xにたいし定義される不変量である．これは代数体の整数環のイデアル類群や単数群，代数多様体のChow 群などを一般化した重要な研究対象である．1970 年代に Grothendieck が，さまざまなコホモロジー理論の背後に存在する普遍的コホモロジー理論としてその存在を予見していた．1980 年代に S.Bloch は Chow 群を一般化した高次 Chow 群を定義し，正則スキームにたいしてはこれがモチフィックコホモロジーに期待される性質をもつことを示した．本研究が対象とするのは次の予想である．

予想２： 数論的スキームのモチフィックコホモロジーは有限生成アーベル群である．

予想２は，代数体のイデアル類群が有限であること(Minkowski の定理)，代数体の整数環の単数群が有限生成であること(Dirichlet の定理)，代数体上のアーベル多様体の有理点のなす群が有限生成であること(Mordell-Weil の定理)の一般化である．モチフィックコホモロジーについて国際的に活発な研究が行われてきた理由のひとつは，数論的スキームのゼータ関数の特殊値予想(Tate 予想，Beilinson 予想，Bloch-加藤予想)で中心的役割を果たすことにある．予想２はゼータ関数の特殊値予想の大きな部分を占める重要な未解決問題で，Mordell-Weil の定理と 1 次元の場合(代数体の整数環あるいは有限体上の曲線)を除いては殆ど結果は知られていなかった．

当該研究の目的はこの予想にたいする新たな貢献を与えることである．

３．研究の方法

当該研究は代数幾何や数論幾何の様々な対象を多角的かつ有機的に研究している．研究目的は，古典的な重要定理(代数体のイデアル類群や単数群の有限性，Hasse 原理，類体論，リーマン面の Abel の定理)の高次元化あるいは新しい理論体系での一般化で，国際的に重要性が認識される活発な研究の対象である．研究手法は，Hodge 理論，p-進 Hodge 理論，エタールコホモロジー理論，リジッド解析幾何，など現代数学の様々な手法を交錯させ駆使するものである．

４．研究成果

(1)**高次元類体論**：当該研究では，加藤-斎藤の高次元類体論を本質的に改良する新たな進展をもたらした．代数的K理論のかわりにモデュラス付きChow群 を用いて$\pi_1^{ab}(U)$を記述し，その帰結として Drinfeld-Deligne が提出した有限体上の多様体上のl-進層の存在予想の部分的(層の階数が1の場合)解決を与えた．Drinfeld-Deligne の予想は **高次元類体論の非アーベル化** を与えるものである．これをさらに詳しく説明する．

まず Drinfeld-Deligne による有限体上の滑らかな多様体 U 上の l-進層の存在予想を説明する．U上の滑らかなl-進層 $\mathcal{F},\mathcal{F}'$ にたいしその semi-simplification が等しいとき同値であるとする．自然数rにたいし$\mathcal{S}_r(U)$ を階数rのU上の滑らかな l-進層の同値類の集合とする．U上滑らかな l-進層はUの代数的基本群のl-進表現に同値であり，$\mathcal{S}_r(U)$ の理解は Uの代数的基本群の理解につながる非常に重要な問題である．U が1次元(つまり曲線)の場合 Lafforgue が完成した Langlands 対応により $\mathcal{S}_r(U)$は $\mathrm{GL}_r(\mathbb{A}(K))$ ($\mathbb{A}(K)$ はUの関数体 Kのアデール環)の保型表現により理解される．そこで$\mathcal{S}_r(U)$ の理解を1次元の場合に帰着できればその効用は計り知れない．このために骸骨層(skeleton sheaf)を導入する：U上の曲線の正規化全体の集合を $Cu(U)$ で表す．曲線上の l-進層の系:

$$\mathcal{V}=(V_C)_{C\in Cu(U)} \quad (V_C\in\mathcal{S}_r(C))$$

で自然な整合条件(閉点のフロベニウス作用の固有多項式たちが等しいという条件)を満たすものをU上の骸骨層と呼び，その全体を$\mathcal{S}\mathrm{k}_r(U)$ で表す．U上のl-進層をU上の曲線の正規化に制限することで写像 $\tau(U):\ \mathcal{S}_r(U)\to\mathcal{S}\mathrm{k}_r(U)$ が生ずる．チェボタレフの密度定理により $\tau(U)$ は単射である．よって $\tau(U)$ の像を記述すること，つまりU上の骸骨層がいつU上のl-進層に貼り合うかを知ることが問題である．このために Uのコンパクト化 $j:U\hookrightarrow X$ (Xは固有的正規な多様体，jは開埋め込み)を固定する．Uと交わらない X上の有効カルティエ因子 Dにたいし「U上の骸骨層 $\mathcal{V}$の分岐がD 以下である」という性質が分岐理論を用いて定義される．そのような骸骨層全体を $\mathcal{S}\mathrm{k}_r(X,D)$ で表す．

予想 3：(Deligne)

$\mathrm{Image}(\tau(\mathrm{U}))=\bigcup\ \mathcal{S}\mathrm{k}_r(X,D)\ \subset\ \mathcal{S}\mathrm{k}_r(U)$

ここで和は U と交わらない X上の有効カルティエ因子 D全体をわたる．

Drinfeld はDが被約のとき

$\mathcal{S}k_r(X,D)\subset\mathrm{Image}(\tau(U))$ を示した．

研究代表者は次を示した．

定理 1 : 基礎体の標数が2でないなら予想 3は正しい．

定理1は，モデュラス付き Chow 群を用いて$\pi_1^{ab}(U)$を記述する高次元類体論(定理 3)から導かれる．Xの0次元 Chow 群 $CH_0(X)$は，X上のゼロサイクル(Xの閉点の整数係数の有限和)全体の群を有理同値関係で割った群である．$CH_0(X)$を一般化する Dをモヂュラスとする0次元 Chow 群 $CH_0(X,D)$ が，ゼロサイクルの群をモヂュラス付きの有理同値関係で割った群として定義された．U と交わらない X上の有効カルティエ因子 D 全体にわたり $CH_0(X,D)$ の逆極限をとったものを $C(U)$ とすると 高次元相互写像

$$\rho(U):\ C(U)\to\pi_1^{ab}(U)$$

が定義される．$\dim(U)=1$ のとき $\rho(U)$ は古典的類体論における Artin の相互写像に他ならない．よって次の定理は古典的類体論の高次元化である．

定理 2 : 基礎体の標数が2でないなら，$\rho(U)$は副有限群の同型

$$C(U)^0\cong\pi_1^{ab}(U)^0:=Ker(\pi_1^{ab}(U)\to\pi_1^{ab}(Spec(k)))$$

を誘導する．ここに $C(U)^0$ は次数0のゼロサイクルのなす $CH_0(X,D)$ の部分群の逆極限である．

定理 2 の証明では加藤和也と松田茂樹による高次元分岐理論(非完全な剰余体をもつ完備離散付置体のアーベル拡大の分岐理論)が本質的な役割を果たす．加藤-松田はそのようなアーベル拡大の暴分岐を統制する Artin 導手の理論を構成した．定理２証明の要は，これを代数的サイクルを用いて精密化するサイクル論的 Artin 導手を構成することである．

(2)高次元 Hasse 原理：当該研究では予想１にたいし次の結果を示すことに成功した．

定理３： X を有限体 k 上の滑らかで固有的な多様体とする． n が k の標数と互いに素なら全ての $a>0$ にたいし $KH_a(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})=0$.

定理３は様々な応用を持つ：有限体上の多様体のゼータ関数の特殊値問題への応用，モチフィックコホモロジーの有限性，高次元類体論のモチフィックコホモロジーによる高次化，特異点論とくに McKay 原理(McKay 対応の背後にある原理)への応用，が挙げられる．

(3)モチフィックコホモロジーの有限性予想：当該研究では予想２に対する貢献を与えた．ひとつは，加藤予想の部分的解決(定理３)から有限体上滑らかな多様体のモチフィックコホモロジーの有限性の新たな結果を導いた．もう一つは，局所体上の多様体の Chow 群の有限性に関する Colliot-Thélène の予想を部分的に解決した．以下これらについて説明する．

X を数論的スキームとする． X が正則で，有限体または整数環上固有的なら有限係数の 0 次元高次 Chow 群と X のエタールコホモロジーの比較定理が加藤予想から従うことを示した(証明には Voevodsky が自身のモチーフ理論を用いて証明した Bloch-加藤予想が用いられる)．エタールコホモロジーは有限群であることが知られているので，加藤予想の研究成果を適用して高次 Chow 群の有限性定理が得られる．定理３から有限体上固有的で滑らかな多様体の高次 Chow 群の有限性定理が得られる．また上述の結果を Voevodsky のモチーフの理論を用いて拡張し，有限体上の(固有的とも滑らかとも限らない)スキームのモチフィックホモロジー(高次 Chow 群の一般化)の有限性定理に拡張することにも成功した．

モチフィックコホモロジーの有限性予想の特別な場合として次が重要である(Bloch-Beilinson 予想)．予想の $r=dim(X)-1$ の場合は Mordell-Weil の定理から従う．それ以外に知られている結果はごく特別な場合しかない．

予想４：代数体上射影的で滑らかな多様体 X の r 次元代数的サイクルの Chow 群 $CH_r(X)$ は有限生成である．

この問題に迫るために，まず X が局所体上の多様体の場合に $CH_r(X)$ の構造を調べることは自然な発想である．この場合一般には $CH_r(X)$ は有限生成でないことが知られていた．その一方で Colliot-Thélène は以下の予想を提出した(weak Mordell-Weil 定理の類似)．

予想 ５：X は局所体 k 上滑らかな射影的多様体とする．自然数 n にたいし $CH_0(X)/n$ は有限である．また $CH_0(X)$ のねじれ部分 は有限である．

研究代表者により次が示された．

定理４： n が k の剰余体の標数と互いに素なら $CH_0(X)/n$ は有限である．

一方，当該研究では $CH_0(X)$ のねじれ部分が無限である例が構成されこの分野の研究者に驚きを与えた．この成果ではでは局所体上の多様体の Chow 群の研究に 混合 Hodge 加群の理論を用いる画期的なアイデアが用いられた．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔**雑誌論文**〕（計 12 件）

(1) Zero-cycles on varieties over p-adic fields and Brauer groups,
S. Saito and K. Sato,
Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (2015), to appear (査読有).
http://www.sciencedirect.com/science/journal/00129593

(2) 高次元類体論の現在-非アーベル化への展望と高次元 Hasse 原理,
斎藤秀司，日本数学会「数学」 印刷中 (2015) (査読有)．
http://www.mathsoc.jp/publication/sug

aku/
(3) Lefschetz theorem for abelian fundamental group with modulus,
M. Kerz and S. Saito,
Algebra and Number Theory 8 (2014), 689--702 (査読有).
http://msp.org/ant/about/cover/cover.html

(4) Etale duality for constructible sheaves on arithmetic schemes,
U. Jannsen and S. Saito and K. Sato,
J. Reine Angew. 688 (2014), 1--65 (査読有).
http://www.degruyter.com/view/j/crll

(5) Cohomological Hasse principle and resolution of quotient singularities,
M. Kerz and S. Saito,
New York J. Math. 19 (2013), 597--645 (査読有).
http://nyjm.albany.edu/nyjm.html

(6) Cohomological Hasse principle and motivic cohomology of arithmetic schemes,
M. Kerz and S. Saito,
Publ. Math. IHES 115 (2012), 123--183 (査読有).
http://www.springer.com/mathematics/journal/10240

(7) Bertini theorems and Lefschetz pencils over discrete valuation rings, with applications to higher class fileld theory,
U. Jannsen and S. Saito,
J. of Algebraic Geometry 21 (2012), 683--705 (査読有).
http://www.ams.org/publications/journals/journalsframework/jag

(8) Cohomological Hasse principle and motivic cohomology of arithmetic schemes,
S. Saito,
Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Hyderabad, India, 2010. Volume 2 (2011), 83--105 (査読有).

(9) 高次元ハッセ原理と類体論の一般化 (Cohomological Hasse principle and higher dimensional class field theory),
斎藤秀司,
数理研講究録別冊 (RIMS Kokyuroku Bessatsu) 25 (2011) 1--21 (査読有).
http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu-j.html

(10) A finite theorem for zero-cycles over p-adic fields,
S. Saito and K. Sato,
Annals of Mathematics 172 (2010), 593--639 (査読有).
http://annals.math.princeton.edu/

(11) A p-adic regulator map and finiteness results for arithmetic schemes,
S. Saito and K. Sato,
Documenta Math. Extra Volume: Andrei A. Suslin's Sixtieth Birthday (2010), 525-594 (査読有).
http://math.uiuc.edu/documenta/

(12) Recent progress on the Kato conjecture,
S. Saito,
in: Quadratic forms, linear algebraic groups, and cohomology, Developments in Math. 18 (2010), 109--124 (査読有).

〔学会発表〕(計 17 件)
(1) K-theory of rigid spaces and topological Chow groups of algebraic varieties, S. Saito, ``Arithmetic and Algebraic Geometry 2015", University of Tokyo, Tokyo, Japan, 2015年1月27日-31日.

(2) Toward motives with moduli, S. Saito, ``Higher Invariants", Regensburg University, Germany, 2014年9月22日-26日.

(3) Relative motivic complex with modulus and regulator maps, S. Saito, (Etale and Motivic Homotopy Theory), Heidelberg University, Germany, 2014年3月24日-3月28日.

(4) Relative motivic complex with moduli, S. Saito, (Motives in Tokyo, 2013), Tokyo University, Tokyo, Japan, 2013年11月25日-11月29日.

(5) Existence conjecture of smooth l-adic sheaves on varieties over finite fields , S. Saito, (Pan Asia Number Theory conference), Vietnam Institute for Advanced Study in Math., Hanoi , Vietnam, 2013年 7月22日-7月26日.

(6) Existence conjecture of smooth l-adic sheaves on varieties over finite fields, S. Saito, (The second major congress organized by the Pacific Rim Mathematical Association (Plenary talk)), the Shanghai Jiaotong University, China, 2013年 6月24日-6月28日.

(7) Chow group of zero cycles with modulus and existence conjecture for lisse sheaves on varieties over finite fields, S. Saito, (Homotopical methods in algebraic geometry), the University of Southern California, Los Angeles, USA, 2013年 5月28日-6月1日.

(8) Existence conjecture for smooth sheaves on varieties over finite fields,
S. Saito, (Arithmetic and Algebraic Geometry 2013), University of Tokyo, Tokyo, Japan, 2013年 1月28日-1月31日.

(9) Algebraic cycles with moduli and ramification theory,
S. Saito, (Seminaire de theorie des nombres de l'IMJ), Chevaleret, Paris. France, 2012年 10月29日.

(10) Higher dimensional Hasse principle and resolution of quotient singularities, S. Saito, 日韓数学合同会議(MSJ-KMS Joint Meeting), 福岡, 九州大学, 2012年9月17日.

(11) Cohomological Hasse principle and McKay principle, S. Saito, (Algebraic Cycles and L-Functions),
Johannes Kepler Research Center, Regensburg, Germany, 2012年 2月27日-3月2日.

(12) Cohomological Hasse principle and McKay principle, S. Saito, (Arithmetic and Algebraic Geometry 2012), University of Tokyo, Tokyo, Japan, 2012年 2月15日-18日.

(13) Hasse principles from Brauer to Kato, S. Saito, (Spring School on higher dimensional class field theory),
University of Mainz, Mainz, Germany, 2011年 3月14-18日.

(14) Cohomological Hasse principle and resolution of singularities, S. Saito, (Arithmetic and Algebraic Geometry 2011), University of Tokyo, Tokyo, Japan, 2011年 1月18-21日.

(15) Cohomological Hasse principle and resolution of singularities, S. Saito, (Seoul-Tokyo Conferencce on Arithmetic and Algebraic Geometry),
KIAS, Seoul, Korea, 2010年 11月26-27日.

(16) Cohomological Hasse principle and finiteness of motivic cohomology, S. Saito, (ICM (Section: Algebraic Geometry), Hyderabad, India, 2010年 8月19-27日.

(17) Suslin homology and higher class field theory, S. Saito, (Regulator III), University of Barcelona, Barcelona, Spain, 2010年 7月19-23日.

〔図書〕(計 1件)
代数的サイクルとエタールコホモロジー,
斎藤秀司 / 佐藤周友,
シュプリンガー現代数学シリーズ 17 (2012), (672) 1--672.

〔産業財産権〕
○出願状況(計 0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

○取得状況(計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
取得年月日:
国内外の別:

〔その他〕
ホームページ等
http://www.lcv.ne.jp/~smaki/ja/index.html

6. 研究組織
(1)研究代表者
斎藤 秀司(Saito Shuji)
研究者番号:50153804
東京工業大学大学院理工学研究科・教授

(2)研究分担者
( )
研究者番号:

(3)連携研究者
( )
研究者番号: