

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 11 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2010～2014

課題番号：22340004

研究課題名(和文)多様体の特異点の研究

研究課題名(英文) Singularities on algebraic varieties

研究代表者

石井 志保子 (Ishii, Shihoko)

東京大学・数理(科)学研究科(研究院)・教授

研究者番号：60202933

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 13,400,000円

研究成果の概要(和文)：Mather-Jacobian discrepancyを用いて定義されたminimal log discrepancy はInversion of Adjunction が成立することが示され、新しい概念、MJ-log canonical, MJ-canonical singularities が導入され、これに関する multiplier ideal も定義され期待される良い性質を持っていることが示された。また、MJ-minimal log discrepancy は次元以下であるが、次元-1をMJ-minimal log discrepancyを持つ特異点を決定した

研究成果の概要(英文)：We proved the Inversion of Adjunction formula according to the minimal log discrepancies which is defined by Mather-Jacobian discrepancies. By means of this discrepancies we introduced MJ-canonical singularities and also MJ-multiplier ideal. We also prove that the ideal has good properties; vanishing theorem, subadditivity property and so on. In general MJ-minimal log discrepancy is greater than or equal to the dimension of the variety, we determined all MJ, we determined singularities whose MJ-minimal log discrepancy.

研究分野：代数幾何学

キーワード：特異点 弧空間 極小対数的食い違い数

1. 研究開始当初の背景

arc space, jet scheme は 1968 年の John F. Nash の preprint (出版は 1995 年) によって導入された。この論文は同時に『特異点を通る arc の族と特異点解消の本質的因子が 1 対 1 に対応するか』という「Nash 問題」も提起した。この preprint が流通してから多くの研究者が Nash 問題に挑戦し 2 次元のいくつかの特異点について肯定的な結果が得られていた。

2003 年に J. Kollar と筆者がこの問題について、任意次元の toric variety で肯定的に解決、4 次元以上では反例があることを証明した。これにより Nash 問題は 2, 3 次元の問題として集約された。

この問題と平行して、L. Ein, M. Mustata, T. Yasuda らによって、jet schemes  $X_m$  の構造により  $X$  の特異点の性質 (対数的標準性, 標準性, 端末性) が記述できることが示された。この問題の自然な延長線上に  $X_m$  が mild な特異点のみを許していることで  $X$  の非特異性が特徴付けられる、という予想が得られる。

2. 研究の目的

特異点の arc space, jet scheme の構造を調べることにより特異点の特徴をとらえることを目的とする。

具体的には次の問題を考える

ジェットスキームがすべて高々 rational singularities を持つならば base scheme は非特異になるか jet scheme の視点で自然な構造を持つ特異点の特徴付ける

3. 研究の方法

研究分担者と適宜セミナーの機会を持ち議論を深めた。海外の特異点関連の研究集会への出席発表を通じて新しい知見を得た。第 6 回日仏特異点シンポジウムを日本で開催し特異点分野の専門家が一同に会し情報を交換する場を設けた。海外の研究者を訪問し共同研究をした。国際研究集会 Commutative Algebra and Singularity theory を日本で開催し、可換環論と特異点理論の世界の第一線の研究者の研究発表情報交換をした。

4. 研究成果

正標数還元を用いることにより、jet schemes がすべて高々有理特異点であっても base scheme が必ずしも非特異にならない例を見つけた (石井, 三内, 渡辺) jet schemes がすべて同型であるにもかかわらず base scheme が同型にならな

い例を見つけた (石井, Winkelmann) Mather-Jacobian discrepancy を用いて定義した minimal log discrepancy は Inversion of Adjunction という性質を持つことを示し、新しい特異点のジャンルを導入し、この範疇では Shokurov の予想が成立することを示した (石井)。Mather-Jacobian discrepancy を用いた multiplier ideal を導入し、消滅定理、弱加法定理を示した (Ein, 石井, Mustata)。

この Mather-Jacobian に関する minimal log discrepancy の最高値をとるものは非特異点 (上記の Shokurov の予想の答) で、その下の値をとるものを特徴付けた (石井, Reguera)

Log-canonical singularities ならば F-pure type であることを定義方程式の係数が代数的独立である場合に示した (高木)

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 27 件)

1. Singularities with respect to Mather-Jacobian discrepancy, L. Ein, S. Ishii, to appear in MSRI Publications

2. Multiplier ideals via Mather discrepancy, L. Ein, S. Ishii, M. Mustata, to appear in Advanced Studies in Pure Math.

3. F-thresholds vs. a-invariants for homogeneous toric rings, D. Hirose, K. Watanabe, K. Yoshida, Communications in Algebra, **42**, 2704-2720 (2014)

4. Ulrich ideals and modules, S. Goto, K. Ozeki, R. Takahashi, K. Watanabe, K. Yoshida Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, **156**, 137-166 (2014).

5. Upper bound of multiplicity of F-rational rings and F-pure rings, C. Huneke, K. Watanabe, to appear in Proc. AMS

6. Classification of 2-dimensional normal graded hypersurfaces with a  $(R)_{\leq 6}$ , K. Watanabe, to appear in the Proceedings of the 2012 Conference at IMPA

7. F 特異点-正標数の手法の特異点論への応用, 渡辺敬一, 高木俊輔, 「数学」(日本数学会), **66**, 1-30 (2014)

8. Characterization of varieties of Fano type via singularities of Cox rings, Y. Gongyo, S. Okawa, A. Sannai and S. Takagi to appear in Journal of Algebraic Geometry
9. The weak ordinarity conjecture and F-singularities, B. Bhatt, K. Schwede and S. Takagi, to appear in Advanced Studies in Pure Mathematics.
10. Singularities with the highest Mather minimal log discrepancies, S. Ishii, A. Reguera, Math. Zeitschrift., **275**, Issue 3-4, pp 1255-1274 (2013)
11. Mather discrepancy and the arc spaces, S. Ishii, Ann. de L'Institut Fourier, **63**, (1), 89-111 (2013)
12. On the F-purity of isolated log canonical singularities, O. Fujino and S. Takagi, Comp.Math. **149** 1495-1510 (2013)
13. Adjoint ideals and a correspondence between log canonicity and F-purity, S. Takagi, Algebra Number Theory **7** 917-942 (2013)
14. Subadditivity formula for multiplier ideals associated to log pairs, S. Takagi, Proc. Am. Math. Soc. **141** 93-102 (2013)
15. Jet schemes of homogeneous hypersurfaces, S. Ishii, A. Sannai and K. Watanabe, Singularities in Geometry and Topology, Strasbourg 2009, IRMA Lectures in Math, **20**, 39-49 (2012)
16. A supplement to Fujino's paper: On isolated log canonical singularities with index one, S. Ishii, J. Math. Sci. Univ. Tokyo. **19**, 135-138 (2012)
17. A variant of Wang's theorem, K. Watanabe, K. Yoshida, Journal of Algebra **369**, 129-145 (2012).
18. Genus of numerical semigroups generated by three element, H. Nari, T. Numata and K. Watanabe, J. of Algebra **358**, 67-73 (2012).
19. Geometric properties on jet schemes, S. Ishii, Comm. Alg. **39**, 5, 1872-1882 (2011)
20. Multiplicity bounds in graded rings, C. Huneke, S. Takagi and K. Watanabe, Kyoto Journal of Mathematics **51**, 127-147 (2011).
21. F-signature of graded Gorenstein rings, A. Sannai and K. Watanabe, J. Pure and Appl. Algebra, **215**, 2190-2195 (2011)
22. Coefficient ideal of ideals generated by monomials, S. Ohnishi and K. Watanabe, Communications in Algebra **39**, 1563-1576 (2011)
23. Supplement to non-lc ideal sheaves, O. Fujino, K. Schwede and S. Takagi, RIMS Kokyuroku Bessatsu, B 24, 1-46 (2011)
24. Isomorphisms of jet schemes. S. Ishii, J. W24. inkelmann, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada. **32**, 19-23 (2010)
25. Nash problem for a toric pair and the minimal log-discrepancy, S. Ishii, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **348**, 985-988 (2010)
26. Discreteness and rationality of  $\mathbb{Q}$ -jumping numbers on singular varieties, M. Blickle, K. Schwede, S. Takagi and W. Zhang, Math. Ann. **347**, 917-949 (2010)
27. Adjoint ideals along closed subvarieties of higher codimension, S. Takagi, J. Reine Angew. Math. **641**, 145-162 (2010)
- [学会発表](計 23 件)
1. MJ-singularities in positive characteristic, S. Ishii, Symposium Commutative Algebra and Singularity theory, 立山, 2014.7.29.
2. F 特異点論の最近の進展について, 高木俊輔, 第 59 回代数学シンポジウム, 2014.9.8., 東京大学.
3. Nilpotency of Frobenius and divisor class groups, S. Takagi, FRG Special Month in Ann Arbor, 2014.6.9., University of Michigan, USA.
4. Singularities with respect to Mather-Jacobian discrepancy. S. Ishii, Workshop, The Commutative Algebra of Singularities in Birational Geometry: Multiplier Ideals, Jets, Valuations, and Positive Characteristic Methods, 2013.5.9., MSRI, Berkeley
5. MJ-discrepancy and Shokurov's conjecture, S. Ishii, Workshop, Complex Algebraic Geometry, 2013.5.30, Oberwolfach.
6. Singularities with respect to Mather-Jacobian discrepancies, S. Ishii, Geometry and Topology of Singular Varieties, Math. Institute, Hanoi, 2013.12.11.
7. MJ-singularities and De Fernex-Hacon's

singularities, S. Ishii, Commutative Algebra and its interaction to Algebraic Geometry and Combinatorics, VIASM, Hanoi 2013.12.17. .

8. Applications of Mather discrepancy, S. Ishii, 第 57 回代数学シンポジウム, 2012.8.22, 京都大学

9. Nash problem, arc spaces and applications, } S. Ishii, 12th International Workshop on Real and Complex Singularities, 2012.7.24, Sao Carlos

10. Mather mld and Shokurov's conjectures, S. Ishii, 2012 Workshop on Moduli and Birational Geometry, 2012.7.12, Busan, Korea

11. Jet closures and local isomorphism problem, S. Ishii, Topology of Singularities in Dalat, 2012.3.19, Dalat University (Vietnam)

12. Jet closures and local isomorphism problem, S. Ishii, Arithmetic and Algebraic Geometry, 2012.2.15, 東京大学

13. A characterization of log Fano varieties, S. Takagi, Arithmetic and Algebraic Geometry 2012, 2012.2.15., 東京大学.

14. A characterization of log Fano varieties via Cox rings, S. Takagi, Special Session on Singularities in Commutative Algebra and Algebraic Geometry, 2012.3.31., University of Kansas, USA.

15. On the F-purity of log canonical singularities, S. Takagi, char-p and p-adic geometry, 2012.6.7., Johannes Gutenberg-Universität Mainz, Germany.

16. F-singularities and a conjecture of Mustata--Srinivas, S. Takagi, 第二回若手代数複素幾何研究集会, 2012.12.17., 佐賀大学.

17. Applications of arc spaces to birational geometry I, II, S. Ishii, Workshop Artin Approximation and Arcs. 2011.11.19, Ervin Schlessinger Institut Vienna (Austria)

18. Geometry of arc space and algebraic geometry, S. Ishii, 2011 年度代数学賞受賞特別講演, 2011.9.28, 信州大学

19. Multiplier ideal via Mather discrepancy, S. Ishii, 6th Franco-Japanese symposium on

Singularities, 2011.9.9, 九州大学

20. The arc space of a variety, S. Ishii, 幾何学シンポジウム, 2011.8.9, 山口大学

21. Arc spaces now, S. Ishii, 研究集会「特異点とそのひろがり」2011.8.4, 京都大学

22. Usual discrepancy versus Mather discrepancy, S. Ishii, 特異点と多様体の幾何学, 2010.9.7, 山形大学

23. Mather discrepancy and arc spaces, S. Ishii, Algebraic Geometry and its Applications Abhyankar's 80th birthday Conference, 2010.9.17, Purdue University

〔図書〕(計 1 件)

1. Introduction to Singularities, S. Ishii, Springer-Verlag (2014)

〔産業財産権〕  
出願状況 (計 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

取得状況 (計 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕  
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

石井 志保子 (ISHII Shihoko)  
東京大学・大学院数理科学研究科・教授  
研究者番号：60202933

(2) 研究分担者

渡辺 敬一 (WATANABE Keiichi)  
日本大学・文理学部・教授  
研究者番号：10087083

(3) 研究分担者

高木 俊輔 (TAKAGI Shunsuke)

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授  
研究者番号：40380670

(4)研究分担者

都丸 正 (TOMARU Tadashi)  
群馬大学・医学部・教授  
研究者番号：70132579