

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 9 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2010～2014

課題番号：22340005

研究課題名(和文)無限対称性の代数解析

研究課題名(英文)Algebraic analysis of infinite symmetry

研究代表者

柏原 正樹(Kashiwara, Masaki)

京都大学・数理解析研究所・研究員

研究者番号：60027381

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 11,800,000円

研究成果の概要(和文)：この5年間の表現論に関連した研究の成果として大きなものが3点挙げられる。第一は、確定特異点型ホロノミーD-加群のリーマン・ヒルベルト対応を不確定特異点型ホロノミーD-加群に拡張したこと(A. D'Agnoloとの共同研究)、第二は、余次元3予想の肯定的解決(K. Vilonenとの共同研究)、第三は、円分鏡ヘッケ代数を用いた量子群の表現の圏化である(S-J. Kangとの共同研究)。

研究成果の概要(英文)：There are three significant results of the research on representation theory during these five years.

First, I proved the Riemann-Hilbert correspondence for holonomic D-modules (with A. D'Agnolo). Second, I proved "codimension-three conjecture" (with K. Vilonen). Third, I established a categorification of quantum groups via cyclotomic quiver Hecke algebras (with S-J. Kang).

研究分野：数学

キーワード：表現論 リーマン・ヒルベルト対応 圏化

1. 研究開始当初の背景

表現論は、近年、幾何学、圏論、組み合わせ論などいろいろの視点から発展している。また、19世紀、20世紀前半における群を中心とした研究から、量子群やヘッケ環などの新しく導入された概念をもちいて、それまで扱えなかった対称性を扱うようになってきている。

また多くの対象を同時に眺めることにより、新たな対称性が見えてくる例がいろいろ見つかってきた。これには、圏論的視点が重要な役割をはたしていた。これは、多くの対象を同時に扱う際に、集合より、その要素間の関係を記述できる圏の言葉が適しているからである。圏論的視点は、籐多様体や偏屈層などの幾何的視点と相俟って大きく発展していた。

また、Khovanov-Lauda, Rouquier によって導入された籐ヘッケ環が、いろいろな表現の圏化に大きな役割をするだろうと期待されていたが、まだその全体像はつかめていなかった。

2. 研究の目的

表現論を、幾何学、圏論、組み合わせ論の観点から研究することが目的である。特に、籐ヘッケ環をもちいた量子群とその表現の圏化を研究する。

また、表現論の基礎となる D-加群の理論、量子変形の理論などを整備することも目的の一つである。

3. 研究の方法

多くの研究が海外の研究者との共同研究であるため、共同研究者の P. Schapira, K. Vilonen, A. D'Agnolo 達をしばしば京都に招いて研究を進めた。また、数回にわたりソウルに数ヵ月滞在して、Seok-Jin Kang や Myungho Kim, Se-jin Oh 等韓国在住の研究者たちと共同研究をおこなった。

4. 研究成果

この5年間の表現論に関連した研究の成果として大きなものが3点挙げられる。

(1) Andrea D'Agnolo とともに(一般の)ホロノミーD-加群のリーマンヒルベルト対応を証明した。確定特異点型ホロノミーD-加群と偏屈層が1対1に対応するというリーマン・ヒルベルト対応は、既に1980年頃に、研究代表者によって得られていた。これを不確定特異点型ホロノミーD-加群の場合に拡張することは、長い間の懸案であった。その困難の一つは、確定特異点型ホロノミーD-加群に偏屈層を対応させる関手をそのまま不確定特異点型の場合に適用すれば、

異なった2個の不確定特異点型ホロノミーD-加群に同じ偏屈層が対応することが起ることにある。したがって別の関手を考え出さなければならない。解決への最初の手がかりが、D-加群(微分方程式)の緩やかに増大する解を用いることであることは90年代にわかっていた。しかしこれでも不十分であることも知られていた。

もとの空間だけを考えるのではなく、それに直線をかけた1次元大きな空間を用いるアイデアを得るにいたって、最終的な解決に到達した。

この対応において、ホロノミーD-加群に呼応する位相的対応物は、副解析層(subanalytic sheaf)と呼ばれるものになる。この対応によって、ホロノミーD-加群の導来圏が、副解析層の導来圏に埋め込まれるのである。

一方、確定特異点型リーマン・ヒルベルト対応は、BBDG (A. A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne, Faisceaux pervers, Astérisque, 100, 1982)による偏屈層の半単純性定理と分解定理の結果を併用することにより、表現論の非常に深い結果をもたらしてきた。例えば、G. Lusztigによる大域結晶基底の正值性が良い例である。最近、望月拓郎は、BBDGの結果を大きく拡張し、ホロノミーD-加群に対する半単純性定理と分解定理を証明した (T. Mochizuki, Wild harmonic bundles and wild pure twistor D-modules, Astérisque No. 340, 2011)。

この結果とあわせれば、ホロノミーD-加群のリーマン・ヒルベルト対応は、多くの分野に応用できると期待できる。

(2) 第二の成果は、余次元3予想の肯定的解決である (Kari Vilonen との共同研究)。ホロノミーD-加群を超局所的に、余接束上で考えると、その台はラグランジュ多様体となる。ラグランジュ多様体の余次元2の部分集合の外で一致する2つのホロノミー加群が全体で一致することは、既に70年代に知られていた。

そこで、ラグランジュ多様体の余次元3の部分集合の外で与えられたホロノミー加群は必ず全体に延びるであろうと予想されていたが、長らくその是非はわかっていた。これを、肯定的に解決した。そこで用いられたのは、Siu-Trautmannによる、多様体上の接続層の延長定理である。彼らは、余次元3の部分集合の外で与えられた反射的接続層が必ず全体に拡張できることを証明している。これをうまく非可換の場合に適用することにより証明に成功した。

この予想の解決により、D-加群の新しい構成方が得られたことになる。これをシンプレクティック多様体の量子化とあわせれば、

表現論への応用が見込まれる。

(3) 第三の成果は、籐ヘッケ環をもちいた表現の圏化である。籐ヘッケ環が、量子群(の半分)を圏化することは知られていた。一方、量子群の半分が籐多様体をもちいて幾何的に Lusztig により構成されたのに対し、中島啓は、二重籐多様体をもちいて量子群の既約表現が幾何的に構成されることをしめた。この類似から、円分籐ヘッケ環とよばれる籐ヘッケ環の商を用いれば、量子群の既約表現の圏化が得られると予想されていたが、円分籐ヘッケ環の構造の複雑さのため、わかっていなかった。この予想を Seok-Jin Kang との共同研究により示した。

5 . 主な発表論文等

[雑誌論文](計 14 件)

Seok-Jin Kang, Masaki Kashiwara,
Se-jin Oh,
Supercategorification of quantum
Kac-Moody algebras II.
Adv. Math. 査読有, 265 (2014), 169--240.
doi:10.1016/j.aim.2014.07.036

Masaki Kashiwara, Kari Vilonen,
Microdifferential systems and the
codimension-three conjecture.
Ann. of Math. 査読有, (2) 180 (2014), no.
2, 573--620.
DOI 10.4007/annals.2014.180.2.4

Masaki Kashiwara, Pierre Schapira,
Microlocal Euler classes and Hochschild
homology.
J. Inst. Math. Jussieu 査読有, 13 (2014),
no. 3, 487--516.
doi:10.1017/S1474748013000169

Dimitar Grantcharov, Ji Hye Jung,
Seok-Jin Kang, Masaki Kashiwara, Myungho
Kim,
Crystal bases for the quantum queer
superalgebra and semistandard
decomposition tableaux.
Trans. Amer. Math. Soc. 査読有, 366 (2014),
no. 1, 457--489.
DOI: 10.1090/S0002-9947-2013-05866-7

Seok-Jin Kang, Masaki Kashiwara,
Euiyong Park,
Geometric realization of
Khovanov-Lauda-Rouquier algebras
associated with Borchers-Cartan data,
Proc. Lond. Math. Soc. 査読有, (3) 107
(2013), no. 4, 907--931.
doi:10.1112/plms/pds095

Seok-Jin Kang, Masaki Kashiwara,
Se-jin Oh,
Supercategorification of quantum
Kac-Moody algebras,
Adv. Math. 査読有, 242 (2013), 116--162.
doi:10.1016/j.aim.2013.04.008

Andrea D'Agnolo, Masaki Kashiwara,
On a reconstruction theorem for holonomic
systems,
Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 査読
有, 88 (2012), no. 10, 178--183,
DOI:10.3792/pjaa.88.178.

Seok-Jin Kang, Masaki Kashiwara,
Categorification of highest weight
modules via Khovanov-Lauda-Rouquier
algebras,
Invent. Math. 査読有, 190 (2012), no. 3,
699--742,
DOI: 10.1007/s00222-012-0388-1

Masaki Kashiwara,
Biadjointness in cyclotomic
Khovanov-Lauda-Rouquier algebras,
Publ. Res. Inst. Math. Sci. 査読有, 48
(2012), no. 3, 501--524,
DOI: 10.2977/PRIMS/78

Seok-Jin Kang, Masaki Kashiwara,
Olivier Schiffmann,
Geometric construction of highest weight
crystals
for quantum generalized Kac-Moody
algebras,
Math. Ann. 査読有, 354 (2012), no. 1,
193--208,
DOI: 10.1007/s00208-011-0725-5

Masaki Kashiwara,
Notes on parameters of quiver Hecke
algebras,
Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 査読
有, 88 (2012), no. 7, 97--102,
DOI: 10.3792/pjaa.88.97

Stéphane Guillermou, Masaki
Kashiwara, Pierre Schapira,
Sheaf quantization of Hamiltonian
isotopies and applications to
non-displaceability problems,
Duke Math. J. 査読有, 161 (2012), no. 2,
201--245,
DOI: 10.1215/00127094-1507367

Andrea D'Agnolo, Masaki Kashiwara,
On quantization of complex symplectic
manifolds.
Comm. Math. Phys. 査読有, 308 (2011),
no. 1, 81--113,

DOI: 10.1007/s00220-011-1325-7

Masaki Kashiwara, Toshiki Nakashima,
Masato Okado,
Tropical R maps and affine geometric
crystals,
Represent. Theory 査読有, 14 (2010),
446--509.
DOI: 10.1090/S1088-4165-2010-00379-9

〔学会発表〕(計 7 件)

発表表題 Monoidal Categorifications of
cluster algebras
学会等名 Cluster algebras and
Representation theory
発表年月日 2014 年 11 月 6 日
発表場所 Seoul (韓国)

発表表題 Simplicity of heads and socles
of tensor products
学会等名 Representation theory and
related topics
発表年月日 2014 年 8 月 6 日
発表場所 Daegu (韓国)

発表表題 Riemann-Hilbert
correspondence of irregular holonomic
D-modules
学会等名 Combinatorial Representation
theory
発表年月日 2014 年 4 月 24 日
発表場所 Montreal (Canada)

発表表題 Parameters of quiver Hecke
algebras
学会等名 Combinatorial Representation
theory
発表年月日 2014 年 4 月 22 日
発表場所 Montreal (Canada)

発表表題 Symmetric quiver Hecke
algebras and R-matrix
学会等名 Combinatorial Representation
theory
発表年月日 2014 年 4 月 21 日
発表場所 Montreal (Canada)

発表表題 Riemann-Hilbert
correspondence for irregular holonomic
D-modules
学会等名 SNU colloquium
発表年月日 2012 年 5 月 21 日
発表場所 Seoul National University, Seoul,
韓国

発表表題 Cyclotomic quiver Hecke
algebras and Categorification of quantum
groups
学会等名 KAIST colloquium
発表年月日 2011 年 6 月 30 日

場所 KAIST, Daejeon, 韓国

〔図書〕(計 1 件)
Masaki Kashiwara, Pierre Schapira,
Deformation quantization modules,
Astérisque No. 345 (2012), Soc. Math.
France,
xii+147 pp. ISBN: 978-2-85629-345-4

〔産業財産権〕
出願状況(計 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況(計 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
取得年月日:
国内外の別:

〔その他〕
ホームページ等
[http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/
~kenkyubu/kashiwara/](http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/kashiwara/)

6. 研究組織

(1) 研究代表者
柏原 正樹 (KASHIWARA, Masaki)
京都大学・数理解析研究所・研究員
研究者番号: 60027381

(2) 研究分担者

(3) 連携研究者
有木 進 (ARIKI, Susumu)
大阪大学・大学院情報科学研究科・教授
研究者番号: 40212641

谷崎 俊之 (TANISAKI, Toshiyuki)
大阪市立大学・理学研究科・教授
研究者番号: 70142916

中島 俊樹 (NAKASHIMA, Toshiki)
上智大学・理工学部・教授
研究者番号: 60243193

加藤 周 (Kato, Syu)
京都大学・理学部・准教授

研究者番号： 40456760

三輪哲二 (MIWA, Tetsuji)
京都大学・国際高等教育院・特定教授
研究者番号： 10027386

(4)研究協力者

Pierre Schapira

Seok-Jin Kang

Kari Vilonen

Andrea D'Agnolo