

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 11 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2010～2014

課題番号：22340006

研究課題名(和文) 数論的基本群の構造の解明にかかわる数論幾何の諸問題

研究課題名(英文) Various problems in arithmetic geometry concerning the structure elucidation of arithmetic fundamental groups

研究代表者

玉川 安騎男 (TAMAGAWA, Akio)

京都大学・数理解析研究所・教授

研究者番号：00243105

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 8,600,000円

研究成果の概要(和文)：当初の研究実施計画の通り、本補助金及び他経費の使用により、海外研究協力者のChristopher Rasmussen氏、Anna Cadoret氏、Mohamed Saidi氏の来訪を期間中ほぼ毎年度実現し、代数曲線の被覆と基本群に関する数論幾何について、当初の研究目的を十分に果たすことができた。Rasmussen氏との共同研究では、期間中2編の共著論文を投稿し、さらに1編投稿準備中である。Cadoret氏との共同研究では、期間中6編の共著論文を発表し、さらに3編投稿中である。Saidi氏との共同研究では、期間中1編の共著論文を発表し、さらに1編は発表予定、2編投稿中、1編投稿準備中である。

研究成果の概要(英文)：As the original research plans, I invited each of my three overseas collaborators -- Christopher Rasmussen, Anna Cadoret and Mohamed Saidi -- almost every year during the period, by means of the present kakenhi grant and other financial sources, and made sufficient research achievements on the arithmetic geometry of covers and fundamental groups of algebraic curves. During the period, I submitted two joint papers with Rasmussen and had one more in preparation; published six joint papers with Cadoret and submitted three more; and published one joint paper with Saidi, had one more to appear, submitted two more and had one more in preparation.

研究分野：整数論・数論幾何学

キーワード：代数曲線 被覆 基本群 ガロア表現 アーベル多様体 正標数 国際研究者交流

1. 研究開始当初の背景

研究代表者は、平成17年度から平成21年度の5年間に、以下の3名の外国人研究者の訪問を、それぞれ毎年1、2回ずつ受けてきた：Christopher Rasmussen (米ウエズリアン大)、Anna Cadoret (仏ボルドー第1大、現在は仏エコール・ポリテクニーク)、Mohamed Saidi (英エクセター大)。いずれも当初は先方からの希望で訪問が実現したのだったが、幸運にも3名それぞれとの共同研究がスタートし、5年間で既にいくつかの研究成果が得られていた。

2. 研究の目的

代数多様体の数論的基本群の群論的及び数論幾何学的構造を解明する、というのが究極の目的である。そのために、特に次の5つの具体的重要問題の究明を目指す。

A. $P^1_{\mathbb{Q}} - \{0, 1, \infty\}$ の数論的基本群に付随する副1外ガロア表現の核についての伊原の問題に関連する、代数体上のアーベル多様体のある有限性予想へのアプローチ。特に、楕円曲線の場合の一般的解決。

B. \mathbb{Q} 上有限生成体上の代数多様体の数論的基本群の1進表現に対する普遍下界像存在予想へのアプローチ。特に、関連する幾何的予想の代数曲面の場合の一般的解決。

C. p 進局所体上の代数曲線の数論的基本群に関するセクション予想。

D. 有限体上の代数曲線の数論的基本群に関する副遠アーベル幾何 (特に、 $g=1$ の場合)。

E. 正標数代数閉体上の代数曲線の基本群のモジュライ依存性。

このうち、問題AはRasmussenとの共同研究、問題BはCadoretとの共同研究、問題C、D、EはSaidiとの共同研究の延長線上にある。問題D、Eは、また、研究代表者個人の10年以上前からの研究の延長線上にもある。

3. 研究の方法

本研究においては、3名の研究協力者 (海外共同研究者) Christopher Rasmussen、Anna Cadoret、Mohamed Saidi との3つの共同研究が中核をなしている。このため、各研究協力者と最低年1回程度、直接の研究打合せ・研究討論を行い、研究計画を遂行していく。また、得られた成果の整理、発表、及び、国際研究集会・国際セミナーとの連携協力による、数論的基本群とその関連分野の集中的な情報収集の二点にも重点を置く。上記5つの問題を並行して扱うというのは一見非効率のようだが、例えばある問題の究明が当初計画

通りに進まないときには一旦ストップして別の問題の究明に当たる、など横断性に基づく柔軟性が発揮できる。

4. 研究成果

Rasmussen氏との共同研究では、「研究の目的」Aに関して、まず、数体上のアーベル多様体の有限性定理についていくつかの技術的進歩を得て、論文を完成・投稿した。また、数体上のアーベル曲面の還元に関する結果を得て、論文を作成・投稿した。さらに、射影直線の巡回被覆と伊原の問題に関する結果を得て、論文を作成した (投稿準備中)。

Cadoret氏との共同研究では、「研究の目的」Bに関して、まず、代数曲線の数論的基本群の1進表現については、代数曲線上のアーベルスキームの1冪ねじれ点の普遍上界存在定理について、論文を出版した (論文)。また、普遍下界像存在問題について、論文を完成・出版した (論文)。さらに、幾何的基本群の像 (のリー環) が非自明なアーベル化を持つ場合にも、リー環論的手法により一般的予想とその部分的解決を得て、論文を作成・出版した (論文)。次に、代数曲線の幾何的基本群の法1表現系については、まず、代数曲線のアーベルスキームに付随する法1表現系の場合に種数増大性定理を一定の技術的仮定の下で得て、論文を出版した (論文)。さらに、より一般の種数増大性定理を証明し、論文を作成・投稿した。また、一般線形群の有限部分群に関するJordan-Noriの定理の精密化を証明し、法1表現系の1独立性等の結果を得、論文を作成・投稿した。さらに、ゴナリティー増大予想に関する強い結果を得て、論文を作成した (平成27年5月に投稿済)。なお、関連して、アーベル多様体のねじれ点の普遍上界存在定理とヤコビ多様体のねじれ点の普遍上界存在定理の定量的比較について、論文を出版した (論文)。

Saidi氏との共同研究では、「研究の目的」Cに関連して、有限生成体上のアーベル多様体のセルマー群やタイト・シャファレヴィッチ群についての論文を作成した (投稿準備中)。また、有限生成体上の代数曲線に対する双有理セクション予想についても若干の進捗があった。「研究の目的」Dに関しては、有限体上の曲線やその関数体の遠アーベル幾何に関して、まず、(ある種の局所条件を仮定した) Hom版についての論文を出版した (論文)。また、副遠アーベル幾何における基本予想 (Isom版) について、論文を2編完成・投稿した。「研究の目的」Eに関しては、正標数の代数曲線族のファイバーの基本群の非定値性について、いくつかの技術的な進歩を得てモジュライ依存性に関する望ましい結果の証明を確定することができ、論文を完成・投稿した (論文)。

5. 主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計8件)

Mohamed Saidi and Akio Tamagawa, Variation of fundamental groups of curves in positive characteristic, to appear in Journal of Algebraic Geometry, 査読有.
DOI/URL: 未定

Anna Cadoret and Akio Tamagawa, Controlling the Galois images in one-dimensional families of l -adic representations, Journal of Algebra 412 (2014), 189-206, 査読有.
DOI: 10.1016/j.jalgebra.2014.04.024

Anna Cadoret and Akio Tamagawa, A uniform open image theorem for ℓ -adic representations II, Duke Mathematical Journal 162 (2013), no. 12, 2301-2344, 査読有.
URL:
<http://projecteuclid.org/euclid.dmj/1378729689>

Anna Cadoret and Akio Tamagawa, Note on torsion conjecture, Séminaires et Congrès 27 (2013), 57-68, 査読有.
URL:
http://smf4.emath.fr/Publications/SeminairesCongres/2013/27/html/smf_sem-cong_27_57-68.php

Anna Cadoret and Akio Tamagawa, A uniform open image theorem for ℓ -adic representations I, Duke Mathematical Journal 161 (2012), no. 13, 2605-2634, 査読有.
URL:
<http://projecteuclid.org/euclid.dmj/1349960278>

Anna Cadoret and Akio Tamagawa, Uniform boundedness of p -primary torsion of abelian schemes, Inventiones Mathematicae 188 (2012), no. 1, 83-125, 査読有.
DOI: 10.1007/s00222-011-0343-6

Anna Cadoret and Akio Tamagawa, On a weak variant of the geometric torsion conjecture, Journal of Algebra 346 (2011), no. 1, 227-247, 査読有.
DOI: 10.1016/j.jalgebra.2011.09.002

Mohamed Saidi and Akio Tamagawa, On the Hom-form of Grothendieck's birational anabelian conjecture in characteristic $p > 0$, Algebra and Number Theory 5 (2011),

no. 2, 131-184, 査読有.
DOI: 10.2140/ant.2011.5.13

〔学会発表〕(計7件)

Akio Tamagawa, Uniform boundedness of torsion of abelian varieties and Galois representations (joint work with Anna Cadoret), TMS Taipei Number Theory Seminar, National Taiwan University, 2015年3月27日, 台北(台湾).

Akio Tamagawa, A finiteness conjecture for abelian varieties over number fields (joint work with Christopher Rasmussen), NCTS Number Theory Seminar, National Tsing Hua University, 2015年3月25日, 新竹(台湾).

Akio Tamagawa, Arithmetic of abelian varieties over function fields and an application to anabelian geometry (joint work with Mohamed Saidi), Fundamental Groups in Arithmetic and Algebraic Geometry, Centro di Ricerca Matematica Ennio De Giorgi, 2013年12月17日, ピサ(イタリア).

玉川安騎男, モジュラー曲線と楕円曲線, 第58回 Encounter with Mathematics 「Modular 曲線の数論と幾何--その魅力と百瀬さんの足跡と--」, 2012年9月10日, 中央大学理工学部(東京都文京区).

Akio Tamagawa, Variation of fundamental groups of curves in positive characteristic, Conference on Galois covers and deformations, IMB, Université de Bordeaux 1, 2012年6月25日, ボルドー(フランス).

Akio Tamagawa, Variation of l -adic Galois representations (joint work with Anna Cadoret), Arithmetic Geometry week in Tokyo, 2012年6月4日, 東京大学大学院数理科学研究科(東京都目黒区).

Akio Tamagawa, Uniform boundedness and arithmetic fundamental groups, Barcelona-Boston-Tokyo Number Theory Seminar in Memory of Fumiyuki Momose, School of Mathematics and Statistics, Universitat Politècnica de Catalunya, 2012年5月22日, バルセロナ(スペイン).

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕
出願状況(計0件)

名称:

発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況（計0件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/ja/list/tamagawa.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

玉川 安騎男 (TAMAGAWA, Akio)
京都大学・数理解析研究所・教授
研究者番号：00243105

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：

(4) 研究協力者

ラスムッセン, クリストファー (RASMUSSEN, Christopher)

カドレ, アナ (CADORET, Anna)

サイディ, モハメッド (SAIDI, Mohamed)