

平成 26 年 6 月 12 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2010～2013

課題番号：22340007

研究課題名(和文) ファノ多様体とエンリケス曲面のモジュライ論的研究

研究課題名(英文) Moduli theoretic study of Fano varieties and Enriques surfaces

研究代表者

向井 茂 (Mukai, Shigeru)

京都大学・数理解析研究所・教授

研究者番号：80115641

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 4,700,000円、(間接経費) 1,410,000円

研究成果の概要(和文)：Enriques曲面は古典的で非常に興味深い代数曲面である。ルート不変量にE7型格子をもつものを詳しく調べ、モジュラー不変量を用いて標準的楕円fibrationの定義方程式を書き下した。大橋久範と共同で、Enriques曲面にMathieu型の半シンプレクティック作用をもつ有限群を分類し、Nikulinと金銅による有限自己同型Enriques曲面の分類の発展として、自己同型群が概アーベルなEnriques曲面を分類した。どの研究もEnriques曲面のルート不変量の厳密な定式化が成功の鍵である。高次数偏極K3曲面については、種数16のK3曲面のモジュライの単有理性を証明した。

研究成果の概要(英文)：As the next case of numerically trivial involution, we classified the numerically reflective involutions of Enriques surfaces into two types. One is of type E7, for which we succeeded to write down the explicit equations of their canonical elliptic fibrations. As a joint work with Hisanori Ohashi, we classified all finite groups which have a semi-symplectic action on an Enriques surface. We also classified all Enriques surfaces whose automorphism groups are virtually abelian. In both cases, the key of proof is the notion of root system of an Enriques surface. It was first defined by Nikulin in 80's and refined in this study of ours.

As for K3 surfaces of higher genus, we succeeded in proving the unirationality of the moduli space of K3 surfaces of genus 16 using the GPS compactification of the moduli space of twisted cubics.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：代数幾何学 Enriques曲面 K3曲面 モジュライ空間 Torelli定理 ルート系 Mathieu群 アーベル曲面

### 1. 研究開始当初の背景

(1) 代数曲面の分類論の大きな成功の一つとして K3 曲面とエンリケス曲面の発見がある。両者に対しては、「周期でもって同型類が決定される」というトレリ型定理が成立する。このおかげで、これらの曲面は 2 次形式と結びつき、多くの興味深い幾何学的事実が発見・証明されてきた。

(2) ファノ多様体は 3 次元 (あるいは余指数 3) の場合が K3 曲面と関連して最も面白いと考えられる。歴史的には G. Fano が Luroth 問題に関連して研究を創始し、Iskovskih がそれを現代化し、研究代表者(向井)が Grassmann 的とモジュライ論的な 2 種の双正則記述を与えた。

(3) Iskovskih は彼の再分類において Fano が見落としていた種数 12 のファノ多様体を見つけた。これは 3 種類の双正則記述 (Grassmann、冪和多様体、2 次曲面網と直交する有理 3 次曲線) が得られた今日でも、他からは孤立していて、新たな解釈や関連研究が求められている。

### 2. 研究の目的

(1) K3 やエンリケス曲面に対するトレリ型定理の知られている証明は曲線の場合のように直接的ではないため、次の問題が未解決である。

逆問題: 重さ 2 のホッジ構造が与えられたとき、それを周期とする K3 曲面を構成せよ。

まだこれの解決に直結するアプローチは発見されていないが、何かの手がかりを掴みたい。

(3) 有理数体上の楕円曲線がモジュラーであるという Wiles 達の定理のおかげで、楕円曲線の研究は飛躍的に進んでいる。これと完全に同じではないが、代数多様体が何かのモジュライ空間になっているとき、通常感覚では考えられない問題を発見できたり、普通の技術では得られない証明ができた。このようなことをファノ多様体や K3 曲面に対して見つけ、正則シンプレクティック多様体の研究にも応用する。

### 3. 研究の方法

モジュライだけでなく、双有理幾何や Borchers 理論に関連する専門家や研究者を招待したり訪問することによってテーマについて議論し、問題を深化・発展させていく。

### 4. 研究成果

Enriques 曲面のホモロジー的に鏡映な対合を研究してきたこととして、ルート不変量に E7 型格子をもつ Enriques 曲面の定義方程式を調べた。その結果、モジュラー不変量を用いて標準的楕円 fibration の定義方程式を書き下せることがわかった。また、

大橋久範氏と共同で、Enriques 曲面に Mathieu 型の semi-symplectic 作用をもつ有限群を分類した。また、Nikulin・金銅による有限自己同型 Enriques 曲面の分類の発展として、自己同型群が almost abelian な Enriques 曲面を分類した。どちらの研究も Enriques 曲面のルート不変量の厳密な定式化が成功の鍵である。

高次数偏極 K3 曲面については、種数 16 の K3 曲面のモジュライの単有理性について、その論文を公開した (数理解析研究所プレプリント #1743)。

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 6 件)

Shigeru Mukai: Curves and symmetric spaces, II, Ann. of Math. 172(2010), 1539-1558. 査読有。  
DOI: 10.4007/annals.2010.172.1539

Shigeru Mukai: Numerically trivial involutions of Kummer type of Enriques surfaces, Kyoto Math. J., 50(2010), 889-902. 査読有。  
DOI: 10.1215/0023608X-2010-017

Shigeru Mukai: Kummer's quartics and numerically reflective involutions of Enriques surfaces, J. Math. Soc. Japan, 64(2012), 231-246. 査読有。  
DOI: 10.2969/jmsj/06410231

Shigeru Mukai: Igusa quartic and Steiner surfaces, Contemp. Math. 564(2012), 205-210. 査読有。  
<http://dx.doi.org/10.1090/conm/564/11171>

Shigeru Mukai: Lecture notes on K3 and Enriques surfaces, "Contribution to Algebraic Geometry", ed. P. Pragacz, European Math. Soc. 2012, pp.389-405. 査読無。DOI: 10.4171/114-1/15

Shigeru Mukai and Hisanori Ohashi: Enriques surfaces of Hutchinson-Gopel type and Mathieu automorphisms, "Arithmetic and Geometry of K3 surfaces and Calabi-Yau Threefolds", eds. M. Schütt, R. Laza and N. Yui, Fields Inst. for Research in Math. Sciences, pp.429-454. 査読有。

〔学会発表〕(計 25 件)

Shigeru Mukai, Enriques surfaces and root systems, "Fifth Pacific Rim Conference of Mathematics", Stanford Univ., California, July 2

Shigeru Mukai, K3 and Enriques surfaces, "IMPNGA Summer School on Algebraic Geometry", Bedlewo, Poland, July 5-8

Shigeru Mukai, Enriques surfaces with many semi-symplectic automorphisms, "Komplexe Analysis", Oberwolfach, Germany, September 5

Shigeru Mukai, Enriques surfaces of type E7, "Perspectives on Algebraic Varieties", Trento, Italy, September 8

Shigeru Mukai, Enriques surfaces of type E7, "Compact Moduli", Georgia Univ., Athens, October 23

Shigeru Mukai, Enriques surfaces of type E7, "Algebraic Geometry Symposium", Kinokawa, October 29

Shigeru Mukai, Simple Lie algebras and Legendre varieties, "Nilpotent orbits and representation theory", Kyushu Univ., February 20

Shigeru Mukai, K3 surfaces of genus 17, "Moduli Spaces", Isaac Newton Inst. for Math. Sci., Cambridge, UK, April 12, 2011

Shigeru Mukai, Enriques surfaces and root systems, "Arithmetic and Geometry of K3 surfaces and Calabi-Yau Threefolds", The Fields Inst. Res. Math. Sci., Toronto, Canada, August 20, 2011

Shigeru Mukai, Automorphisms of Enriques surfaces and the Mathieu group M12, "Periods and Moduli", Seoul, Korea, September 22, 2011

Shigeru Mukai, Enriques surfaces and integral lattices, "Arithmetic and Algebraic Geometry 2012", Univ. Tokyo, February 15, 2012

Shigeru Mukai, Orthogonal Grassmannians and K3 surfaces of genus 18, "Algebraic Geometry of higher dimensional varieties and vector bundles", Kyushu Univ., March 17, 2012

Shigeru Mukai, Enriques surfaces with small/large automorphisms, "Classical Algebraic Geometry", Math. Forschungs Institut Oberwolfach, Germany, June 21, 2012 (International conference)

Shigeru Mukai, Enriques surfaces and root systems, "Moduli and birational geometry", Busan, Korea, July 10, 2012 (International conference)

Shigeru Mukai, Enriques surfaces whose automorphism groups are virtually abelian,

Math. Forschungs Institut Oberwolfach, Germany, September 5, 2012

Shigeru Mukai, Enriques surfaces and Abelian surfaces, "Algebraic and complex geometry", Univ. Hannover, Germany, September 10, 2012 (International conference)

Shigeru Mukai, Enriques surfaces and Igusa quartic, Tokyuu Univ., Jan. 28, 2013

Shigeru Mukai, Enriques surfaces, Luminy, March 2013, 3 lectures.

Shigeru Mukai, Enriques surfaces with 720 symmetries, Michigan Univ., May 18, 2013.

Shigeru Mukai, Enriques surfaces as neighbors of rational surfaces and vice versa, May 28, 2013.

21. Shigeru Mukai, Fano 3-folds, moduli and automorphism groups etc., RIMS, Kyoto Univ. June 19, 2013.

22. Shigeru Mukai, Enriques surfaces, Algebraic Geometry Conference, Univ. Amsterdam, June 9, 2013.

23. Shigeru Mukai, Enriques surfaces and cubic 4-folds with action of M10, "Symplectic Algebraic Geometry", Kansai Seminar House, September 30, 2013.

24. Shigeru Mukai, Invariant theory and geometry - Hilbert's 14th problem, Nagata's counter example and beyond, Opening conference of Center for Mathematical Challenge, Korean Advanced Institute of Science and Technology (KAIST), Dejon, Seoul, December 15, 2013.

25. 向井 茂, K3, Enriques 曲面とルート系について、第 12 回岡シンポジウム、奈良女子大学、2013 年 12 月 14 日。

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

取得状況 (計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~mukai/index.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

向井 茂 (MUKAI, Shigeru)

京都大学・数理解析研究所・教授

研究者番号：80115641

(2) 連携研究者

金銅 誠之 (KONDO, Shigeyuki)  
名古屋大学・多元数理科学研究科・教授  
研究者番号：50186847

(3)連携研究者

森 重文 (MORI, Shigefumi)  
京都大学・数理解析研究所・教授  
研究者番号：00093328

(4)連携研究者

中山 昇 (NAKAYAMA, Noboru)  
京都大学・数理解析研究所・准教授  
研究者番号：10189079

(5)連携研究者

井出 学 (IDE, Manabu)  
常葉学園大学・教育学部・講師  
研究者番号：90367582

(6)連携研究者

大橋 久範 (OHASHI, Hisanori)  
東京理科大学・理工学部・助教  
研究者番号：40547006

(7)連携研究者

高木 寛通 (TAKAGI, Hiromichi)  
東京大学・数理科学研究科・准教授  
研究者番号：30322150