

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 24 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2010～2014

課題番号：22340012

研究課題名(和文) ツイスター空間の幾何学

研究課題名(英文) Geometry of twistor spaces

研究代表者

藤木 明 (Fujiki, Akira)

大阪大学・その他部局等・名誉教授

研究者番号：80027383

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 8,300,000円

研究成果の概要(和文)：2010年著者は Pontecorvo 氏と共同で、たとえば、すべての双曲型井上曲面上に、反自己双対双エルミート構造の実解析族を構成した。その構成はしかし、対応するツイスター空間の構成を経由するもので、この族のパラメータの、反自己双対双エルミート構造の変形としての幾何学的意味が不明であった。本研究では、Lee 束 L と L -ケーラー錐の概念を基礎にしてこれらを説明するための新しい枠組みをあたえ、少なくとも moduli 空間の境界の近傍においては、この枠組みが機能することを示した。

研究成果の概要(英文)：In 2010 the author and M. Pontecorvo have constructed real-analytic family of anti-self-dual bi-hermitian structures for any hyperbolic Inoue surfaces, for instance. The construction, however, is done via the construction of the associated twistor spaces, and therefore the geometry implication of the parameters as deformation of anti-self-dual hermitian structures. In this investigation, based on the notions of Lee bundle L and the associated L -Kähler classes we have found a new framework for discussing the situation, and at least in the neighborhood of the boundary of the moduli space this framework actually works effectively.

研究分野：複素幾何学

キーワード：ツイスター空間 反自己双対多様体 双エルミート構造 非ケーラー曲面

1. 研究開始当初の背景

コンパクト極小非ケーラー曲面上の反自己双対(=asd)エルミート構造の非自明な例は、LeBrun による放物型井上曲面上に明示的に構成されたもの(1991)と上記のツイスター空間を用いる、双曲型および放物型井上曲面上の我々の例が、今日まで唯一のものである。両者の構成はまったく異なっているが、実はどちらも双エルミート構造を与えており、逆に、非自明な反自己双対双エルミート構造を許すのは双曲型または放物型の井上曲面に限られる。

したがって、まずこれら具体例について、与えられた曲面上の双エルミート構造のモジュライ空間の構造を調べることが重要かつ興味ある目標となっていた。

2. 研究の目的

(1) まず我々の例について、上記の moduli 問題を追及する。我々の構成において、各双曲型井上曲面上に対し、丁度 m 次元の(局所普遍性を持つ)実解析族が生じることを示されている。(ただし、 m は曲面の二次元ベッチ数)。しかし、Donaldson-Friedman の方法の一般化による、ツイスター空間を経由する我々の方法では、このパラメータ数 m は極めて抽象的な計算によって得られており、これらを asd エルミート構造の変形のパラメータとして理解することは難しい。そこで、これを何らかの別の角度から理解することを研究の主目的とした。

また、それ以外にも当初の研究目標に挙げた、様々な問題にも取り組んだ。特に、

(2) 複素射影平面の m 個の連結和 mP の上の Joyce の自己双対構造の自己同型群の構造、および、

(3) 非射影的 Moishezon ツイスター空間上、ホモローク 0 となる有理曲線の存在問題をも、研究した。

3. 研究の方法

(1) 我々の実解析族の構成は、上記(2)に述べた Joyce の自己双対族を出発点としている。これは丁度 $(m-1)$ 次元の可微分族をなしているが、これらに対応するツイスター空間の適当な特異モデルに対し Donaldson と Friedman の方法を発動して、この特異モデルの 1-パラメータ smoothing を構成する。このとき、これが双曲型井上曲面上の、ある asd 双エルミート構造に対応するツイスター空間になる。特に、目的(1)に述べたパラメータは $(m-1) + 1$ 次元と分解している。

基本的なアイディアは、次のとおりである。

$(m-1)$ 次元 parameter については、ケーラー曲面の場合の類似を追求することによりこれを双曲型井上曲面上の Lee 束値ケーラー錐の射影化の次元と解釈する。

残りの 1 次元は、asd 双エルミート構造に

対する局所共形ケーラー計量が定める Lee 束の moduli と把握する。

(2) mP 上の自己双対構造の例としては、LeBrun (1991) および Joyce (1995)によるものが基本的なものであるが、前者の自己同型群が、Viaclovsky-Honda により決定されたのに触発され Joyce の場合に同様の決定を行った。Joyce のツイスター空間の構造は、代表者が詳細に決定した(2000)が証明はそこでの諸結果を基礎にしている。

(3) C^* -作用を持つ Moishezon 多様体が、ある種の条件を満たすと ホモローク 0 となる有理曲線を持つ、という代表者の以前の結果(1996)を、上記 LeBrun や Joyce の例に適用し、さらにその変形を考える。

4. 研究成果

(1) 上記のパラメータの分解 $(m-1)+1$ に応じて述べる。

1 次元パラメータは、ツイスター空間の退化のパラメータであるが、このツイスター空間の退化族に対する相対ピカル多様体の構造をまず完全に記述した。

特に、この退化の際の Lee 束の振る舞いをツイスター空間上で完全に記述することにより、Lee 束の退化パラメータを用いて、固定した双曲型井上曲面上での asd 双エルミート構造の 1 次元パラメータの記述をえた。

ここで、(特異 fiber である)Joyce ツイスター空間の特異モデル上では、Lee 束は、その特異点集合の外側で自明となる特殊な直線線束に退化する。またこの際、ツイスター空間の基本直線線束は、退化の方向により、極限值が異なることを見出した。

Lee 束 L を固定したときに生じる $(m-1)$ 次元族の記述を得るために、ケーラー曲面の場合の類似を追及した。一般に非ケーラー曲面に対し、 L 値多重調和関数の層に値を持つ 1 次元コホモロジー群を考え、この中に L 値ケーラー類および L 値ケーラー錐の概念を導入した。すると asd エルミート構造は、対応する局所ケーラー計量の共形類を通じて、定数倍を除き一つの L 値ケーラー類を定める。

ついで、反標準束が正則切断を持つ VII 型の複素曲面について、この L 値コホモロジー群の次元を一般に計算した。特に、双曲型井上曲面については、その幾何学に付随する特殊な L の場合を除き、次元が常に m となることを証明した。したがって、asd 双エルミート構造は、 $(m-1)$ 次元である同次 L 値ケーラー錐の一点を定めることになる。

またこれらの曲面には丁度 m 個の有理曲線が含まれるが、それらに対し、 L -ケーラー類の積分値の比が定義されることを見出した。

から次が従う。asd エルミート構造に対し、対応する Lee 束 L は、双曲型井上曲面の一次元実コホモロジー群の正の部分 R^+ に一点を定める。さらに L を固定するこ

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 13 件)

Goto, R., On the stability of locally conformal Kähler structures. J. Math. Soc. Japan 査読有, 66 (2014), 1375—1401.

Fujiki, A. Automorphism groups of Joyce twistor spaces, Kyoto J. Math. 査読有, 53 (2013), 143–170.

Oguiso, K., Quartic K3 surfaces and Cremona transformation, Fields Institute Communications, 査読有, 67 (2013), 203--208

Goto, R., On deformations of generalized Calabi-Yau and generalized SU(n) structures, Osaka J. Math., 査読有, 49 (2012), 795-832.

Goto, R. Unstructured K-deformations of generalized complex structures and bi-Hermitian structures. Adv. Math., 査読有, 231 (2012), 1041—1067.

Usui, S., Classifying spaces degenerating mixed Hodge structures, Kyoto J. Math., 査読有, 51 (2011), 149–261.

Fujiki, A. and Pontecorvo, M., Non-upper semi-continuity of algebraic dimensions for families of compact complex manifolds, Math. Ann., 査読有, 348 (2010), 593-599.

Fujiki, A. and Pontecorvo, M., anti-self-dual hermitian structures on Inoue surfaces, J. Differential Geom., 査読有, 85 (2010), 15-71.

Goto, R., deformations of generalized complex and generalized Kaehler structures, J. Differential Geom., 査読有, 84 (2010), 525-560.

Campana, F., Oguiso, K., and Peternell, T., Non-algebraic hyperkaehler manifolds, J. Differential Geom., 査読有, 85 (2010), 397-424.

[学会発表](計 15 件)

Fujiki, A., Donaldson-Friedman degenerations of anti-self-dual hermitian structures and Lee classes, Workshop “Complex Geometry and Lie Groups, 2014.6.20, University of Torino, Italy.

Fujiki, A., Bihermitian structures on Kato surfaces, Workshop: “Symplectic Algebraic Geometry, 2013.10.5, 関西セミナーハウス

Fujiki, A., Examples of homologically trivial rational curves on certain Moishezon twistor spaces, Classification of Algebraic Varieties

and related topics, 2013.9.14, Grand Hotel San Michele, Cetraro, Italy

Fujiki, A., Automorphism groups of Joyce twistor spaces, The 18th International Symposium on Complex Geometry, 2012.10.14, 長野県上田市菅平高原, ホテルゾントック

Oguiso, K., Automorphism groups of Calabi-Yau manifolds of Picard number two, Algebraic and Complex Geometry, 2012.9.10, Hannover, Germany.

Fujiki, A., Joyce twistor space and the associated Kaehler spaces, Geometric structures on complex manifolds, 2011.10.6, Steklov Institute of Math., Moscow, Russia

Fujiki, A., Some results on families of anti-self-dual bihermitian structures on hyperbolic Inoue surfaces, Journées Complexes Lorraines, 2011.5.6, Institut Elie Cartan, Nancy, France

Fujiki, A., The geometric interpretation of parameters of families of ASD bihermitian structures on hyperbolic Inoue surfaces, Geometry of complex manifolds IV, 2011.11.29, CIRM, Luminy, France.

Fujiki, A., Locally conformally Kaehler metrics and associated Kaehler cones on compact non-Kaehler manifolds, The 16th International Symposium on Complex Geometry, 2010.11.21, 長野県上田市菅平高原, ホテルゾントック

Fujiki, A., On certain families of anti-self-dual bihermitian structures on hyperbolic Inoue surfaces and the associated period maps, Kyoto Symposium on Complex Analysis in Several Variables XIV, 2011.7.19, 京都大学国際会議場.

11 Fujiki, A., Kaehler cones on non-Kaehler manifolds, Workshop on Algebraic Geometry, Complex Dynamics and their Interaction, 2011.1.7, National Univ. of Singapore, Singapore.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

藤木 明 (FUJIKI AKIRA)
大阪大学・その他部局・名誉教授
研究者番号：80027383

(2) 研究分担者

榎 一郎 (ENOKI ICHIRO)
大阪大学・理学研究科・准教授
研究者番号：20146806

臼井 三平 (USUI SAMPEI)

大阪大学・理学研究科・教授

研究者番号：90117002

小木曾 啓示(OGUIISO KEIJI)

大阪大学・理学研究科・教授

研究者番号：40224133

後藤 竜司 (GOTO RYUSHI)

大阪大学・理学研究科・教授

研究者番号：30252571