

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 10 日現在

機関番号：32641

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2010～2013

課題番号：22340015

研究課題名(和文) 葉層構造・接触構造の微分トポロジー的研究

研究課題名(英文) Topological study of foliations and contact structures

研究代表者

三松 佳彦 (Mitsumatsu, Yoshihiko)

中央大学・理工学部・教授

研究者番号：70190725

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 6,700,000円、(間接経費) 2,010,000円

研究成果の概要(和文)：3, 4, 5次元の空間上の葉層構造と接触構造を中心に、重要な例の構成および、それらの相互関係を研究した。特異点のミルナー・ファイブレーションと呼ばれる構造や、流体力学、古典力学を洗練したシンプレクティック幾何学や多変数複素関数論などの、周辺の色々な数学理論がこれらの対象において交錯する様子を研究した。

曲面の測地線を総合的に調べることのできる測地流は、Anosov 流と呼ばれる特殊な流れを定めるが、それらを中心に上記の色々な数学が交錯し、構造の無駄のなさを表現する様を研究したとも解釈できる。

研究成果の概要(英文)：Foliations and contact structures are studied, with a focus on those structures on 3, 4, and 5 dimensional spaces. Especially the construction of important examples and their mutual relationships are investigated. Interactions of many mathematical theories such as Milnor fibrations associated with singularities, fluid mechanics, symplectic geometry which is a refinement of classical mechanics, and several complex variables, reflected on those structures and objects are studied.

This study is also understood as looking at the tightness of those structures which is interpreted as the result of such mathematical theories are reflected on the geodesic flows of surfaces, which gives rise to a special class of flows called 'Anosov flows'.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：葉層構造 接触構造 シンプレクティック構造 Anosov 流・葉層 強擬凸性 葉向コホモロジー ミルナー・ファイブレーション 非圧縮流体

1. 研究開始当初の背景

(1) 3次元接触トポロジーの研究は世界的にそれ以前の15年間で飛躍的な進歩を遂げ、それをもとに5次元以上のタイトでない接触構造の構成を中心とした研究、及び、特異点のリンクを意識した、接触構造埋め込みの研究が始まりつつあった。研究代表者が1990年代に研究していた双接触構造を用いたSteinでない凸シンプレクティック構造の構成が高次非タイト構造の構成の鍵であることが次第に分かりつつあった。

(2) 一方、葉層構造に関しては代表者とVogt氏の研究により4次元多様体上の2次元葉層に関して、指定した曲面をコンパクト葉を持つ葉層の存在がコホモロジーの条件で記述できることが突き止められていた。また、この理論の幾何学的構成による展開から余次元1の場合の知られていたtubulizationと呼ばれる操作の高余次元での定式化とこの次元における操作可能性の条件が判明したところであった。

(3) 更に、多様体上の流体力学に関する基礎研究が進み、葉層構造論に現れるGodvillon-Vey 普遍量、接触構造論における定義体積(不可積分量)と流体力学における非圧縮流体のhelicityとの関連が目玉されていた。

(4) 次項以下に述べるように、本研究申請時には、これらの状況をもとにした研究計画を立てた。この直後に、ある意味で幸運な展開が起こった。国外のある研究グループが特異点のMilnor fibrationの理論の一つの拠所として5次元球面上の余次元1葉層に葉向シンプレクティック構造を構成できるという研究成果が発表した。代表者がこの成果を精査した結果、本研究開始直後の2010年夏に、これが誤りであることが判明した。

2. 研究の目的

本研究では葉層構造と接触構造を中心に多角的な研究を試みているが、一方で、具体例としてはAnosov流・葉層が極めてしばしば関連して現れることも一つの特徴である。

(1) 葉層構造に対して接触構造はある種の凸性を持った構造であるが、それらの中でも無駄の無い凸性、即ち接触構造のタイト性や葉層構造のtaut性の研究が重要となる。第一の研究目的として3次元Anosov流に付随する接触構造のタイト性を、Anosov葉層の持つ双曲性と流体力学で言うところのhelicity(微分トポロジーの漸近的絡み数)を用いて証明することを当初、研究目的の一つに挙げていた。

(2) 接触構造がopen book分解を必ず伴い、モノドロミーにより接触構造の位相が記述

されることが知られているので、Dehn fillingに拡張してどの程度タイト性が保たれるかを調べること。

(3) 幾何学的量子化の枠組みからの接触構造・Anosov葉層構造の研究を進め、研究目的(1)の内容を深めること。

(4) 3次元Anosov流に付随した4次元多様体上の2次元葉層の構成、特にturbulizationの定式化と実現、turbulizationによるtaut性(の喪失)の研究。

(5) 完全流体の流体力学において、helicityなどの微分位相幾何からアプローチできる保存量について研究すること。

以上(1)~(5)を研究開始当初には研究目的として挙げていた。

3. 研究の方法

研究目的(1)は本研究組織内、松元重則氏らを中心とする研究班での議論が中心的方法であり、研究目的(2)では、同様に、三好氏を中心とする国内研究班が中心。(3)は幾何学的量子化に詳しい高倉氏との議論を中心にし、研究目的(4)に関してはElmar Vogt氏(ベルリン自由大学)との共同研究が中心を占める。(5)と(1)の一部では、木村氏を通じて流体力学の専門家たちとも議論を重ね、helicityを中心に保存量の(微分位相)幾何的理解の進化を試みた。

一方で、研究開始当初の背景で説明した通り、特異点に付随する5次元球面上のMilnor fibrationを研究に取り入れることとなった。これは、研究目的(2)に直接関連しており、また(1)、(3)は3次元接触構造をエンドに持つ4次元シンプレクティック構造をを念頭に置いていたが、これの改変操作を研究することとなり、新たな観点と素材が提供された。

4. 研究成果

研究目的が幾つか独立しているように見えて有機的に関連しているため、研究の進展、状況の変化に応じて上記の項目建を統合・再分割・新規導入した形での研究成果の説明となる。

(1) 先ず、Milnor fibrationを利用して5次元球面上に歴史的に初めてLawsonにより構成された余次元1葉層(Lawson葉層)に対し、葉向シンプレクティック構造が存在することを証明した。これは5次元球面上に4次元の正則Poisson構造が存在する、とも言い換えられ、Poisson構造の研究の立場からも意義のある結果である。特異点論の立場からは「楕円の単純特異点」とそのモノドロミーについての研究であり、目的(2)に現れるopen book分解と接触構造の凸性の研究の5次元

版を自然に行っている。また、シンプレクティック構造や接触構造の凸性の中でも最も強い由来を持つと思われる Stein 多様体(の中でもある種のアフィン代数曲面)のエンドを、接触構造が自然に表れ強い凸性を持っているが、それを凸ではなく周期的なものに変形して取り換える、という操作が不可欠であり、この点がこの成果の際立って意義深い点である。これは、正則 Poisson 構造の構成、または非凸性を内包する完全シンプレクティック微分同相や非タイト高次元接触構造の構成の観点からも重要である。

これについては国内外の多くの国際会議等で発表し、論文は投稿中である。

また、この構成法の要点を一般化して、同様の構成のための枠組みを定式化することにある程度成功した。その結果、現状では、7次元以上の奇数次元球面での Milnor fibration の理論には直接適用できないが、5次元で適用可能と思われるものについては基本的に総て理論が適用できることも判明した。これらの問題意識は、学会発表で提案され、進展状況について学会発表で報告した。論文は準備中。

(2)研究目的(4)に関しては、計画通り比較的順調に研究が進み、成果として一般余次元における turbulization の定式化と、Sullivan の幾何学的 taut 性の意味での taut 性の喪失が証明された。論文は、定式化と幾何学的実現に関するもの1篇と、taut 性に関するもう一篇を準備中。

更に、これらの一連の研究の基礎にあった Thurston の高余次元葉層の h-原理について、葉が2次元の場合の(Thurston が知っていたと思われる)特殊なより次元の高い多様体を經由しない証明が完成できた。これに関する論文は近日投稿予定。

(3) 研究目的(1), (3), (5)に関しては、当初の想定外の研究結果を得たことで、ある程度分離していた問題が急に統合されて研究が進むこととなった。葉層流体の概念を導入したところ、完全流体の保存量に対して、単に保存量としてのみならず、流体のなす空間の構造解析に大きな役割を果たすことが分かった。これについては、先ず学会発表において口頭で、論文として要旨が発表されている。2014年度の海外での国際会議でも招待講演などの依頼をうけ、研究の進展状況が発表される予定である。

一方、葉層流体として保存量が前面に問題として浮かび上がってきたが、葉層のない一般の多様体上の完全流体の場合にも特にホモロジーの保存則が関数解析的な言葉で記述されることが分かった。葉層のある場合のオイラー方程式(完全流体の運動方程式)を書き下す、という難問とも関連してオイラー方程式の主要項(測地曲率を表す項)と多様体の Hodge 分解の関係が、これらの問題の中

心であることが分かった。

(4) 上項で述べた研究に伴い、研究目的(1)については、当初の予定よりも目的(3)により直接関係する幾何学的量子化及び変形量子化にかかわる部分の研究を詳細に行っておく必要が確認された。より具体的には、Anosov 葉層を双接触構造変形する際に、葉層構造や接触構造に固有の(相対的)漸近的絡み数(helicity)が定義される空間の変形が予想外に大きかったことによる。この変形に伴って現れる大きな空間は、ある程度具体的にとらえることのできる空間であることが分かったので、(3)の幾何学的または変形量子化の観点からは興味深く、研究目的に沿った研究成果として挙げるができる。一方、研究目的(1)の観点からは、この方向性に関しては従来の予想は少し甘く、より道のりは険しい(間違っていた訳ではなく、意義深い面がより多く出てきただけのことである)ことが確認された。

これについては、研究目的(1), (3)双方について、新たな研究目標として今後の研究に委ねることとなる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計9件)

Yohihiko MITSUMATSU; 'Helicity in differential topology and incompressible fluids on foliated 3-manifolds', *Procedia IUTAM* vol. 7(2013)167-174. (査読有) DOI:10.1016/j.piutam.2013.03.020

Takashi TSUBOI; 'Homeomorphism groups of commutator width one', *Proceedings Amer. Math. Soc.* 141, (2013) 1839--1847. (査読有) DOI: 10.1090/S0002-9939-2012-11595-3

Tatsuru TAKAKURA; 'On vector partition functions with negative weights', *RIMS Kokyuroku Bessatsu* B39, 2013, pp. 183--195. (査読有)

Kenji FUKAYA, Yong-Geun OH, Hiroshi OHTA, Kaoru ONO,; 'Displacement of polydisks and Lagrangian Floer theory'. *J. Symplectic Geom.* 11 (2013), no. 2, 231-268. (査読有)

Shigenori MATSUMOTO; 'The space of (contact) Anosov flows on 3-manifolds'. *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* 20 (2013), no.3, 445-460. (査読有)

MATSUMOTO, Shigenori; 'Flows of flowable Reeb homeomorphisms'. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 62 (2012), no. 3, 887-897. (査読有)

Takashi INABA, Shigenori MATSUMOTO, Yohihiko MITSUMATSU,; 'Normally contracting Lie group actions'. *Topology*

Appl. 159 (2012), no. 5, 1334-1338. (査読有) DOI:10.1016/j.topol.2011.12.012ns 5

Takashi TSUBOI; 'On the uniform perfectness of the groups of diffeomorphisms of even-dimensional manifolds', Commentarii Mathematici Helvetici, 87, (2012) 141--185. (査読有) DOI: 10.4171/CMH/251

Yoshifumi KIMURA, J. R. Herring: 'Energy spectra of stably stratified turbulence', Journal of Fluid Mech. 698(2012) 19--50. (査読有)

〔学会発表〕(計 18 件)

Tatsuru TAKAKURA; 'Vector partition functions and the topology of multiplicity varieties', 国際研究集会「Knots, Manifolds and Group Actions」, Adam Mickiewicz University, Slubice, Poland, 2013年9月14日. (招待講演)

Y. MITSUMATSU; 'Leafwise symplectic structures on codimension 1 foliations on S^5 '. 国際会議 Geometry and Foliations 2013, 東京大学数理科学研究科, 2013年9月10日. (招待講演)

高倉 樹 'Vector partition functions and the topology of multiplicity varieties' 第60回トポロジーシンポジウム, 大阪市立大学 2013年8月8日. (招待講演)

Y. MITSUMATSU; 'Incompressible fluids on foliated manifolds'. 国際会議 The 6th Pacific RIM Conference on Mathematics 2013, Session: Topological Problems in Fluid Dynamics, 2013年7月1日. (招待講演)

MORIYOSHI, Hitoshi; 'Secondary cyclic cocycle for Connes', Chern character on a Cantor set, China-Japan Conference on Noncommutative Geometry and K-Theory, Jilin University, Changchun, China, June 14, 2013 (招待講演)

Y. MITSUMATSU; 'Milnor's open-book and construction of leafwise symplectic foliations', 国際会議 Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics 2013, 首都大学東京, 2013年3月8日. (招待講演)

Y. MITSUMATSU; 'Lawson's foliation and a regular Poisson structure on the 5-sphere'. Poisson 2012: Poisson Geometry in Math. and Physics. Utrecht University (the Netherland) 2012年7月31日. (招待講演)

Yoshihiko MITSUMATSU; 'Helicity in differential topology'. Topological Fluid Dynamics (IUTAM Symposium), Newton Institute Cambridge, England. 2012年7月25日. (招待講演)

Takashi TSUBOI; 'Homeomorphism groups of commutator width one', Geometry in Dynamics - Satellite Thematic Session, 6th

European Congress of Mathematics, Krakow, July 1, 2012.

Y. MITSUMATSU, Leafwise symplectic structures on codimension one foliations on the 5-sphere. Foliations 2012, University of Lodz (Poland). 2012年6月29日. (招待講演)

Y. MITSUMATSU; 'End-periodic symplectic structure on cubic Fermat surface and Lawson's foliation on the 5-sphere'. Max Planck Institute for Mathematics, Bonn, Germany. 2012年6月11日. (招待講演)

Y. MITSUMATSU; 'Modifications de feuilletages de dimension 2 sur les varietes de dimension 4'. Journee Topologie et Geometrie, Laboratoire de Mathematiques de Bretagne Atlantique, Quimper, France. 2012年5月25日. (招待講演)

Yoshihiko MITSUMATSU; 'A geometric introduction to incompressible fluid motions on manifolds'. 'Roever Lectures' Washington University in St. Louis, U.S.A. 2012年4月19日. (招待講演)

Y. MITSUMATSU; 'Modifications of 2-dim foliations on 4-manifolds', Seminaire EDP, Universite de Toulouse 3. Toulouse, France. 2011年4月1日. (招待講演)

Y. MITSUMATSU; 'Leafwise symplectic structures on Lawson's foliations'. Seminaire topologie differentielle, Universite de Bretagne Sud. Vannes, France. 2011年3月29日. (招待講演)

Y. MITSUMATSU; 'Modifications of 2-dimensional foliations on 4-manifolds and tautness' The 17th Brazilian Topology Meeting, PUC-Rio, Rio de Janeiro, Brazil. 2010年8月3日. (招待講演)

Y. MITSUMATSU; 'Turbulization of 2-dimensional foliations on 4-manifolds and tautness', Conference on Geometry and Topology of Foliations, CRM Univ. Autonoma de Barcelona, Barcelona, Spain. 2010年7月13日. (招待講演)

Shigeaki MIYOSHI; 'A construction of a typical foliation on a 3-manifold'. Conference on Geometry and Topology of Foliations, CRM Univ. Autonoma de Barcelona, Barcelona, Spain. 2010年7月12日. (招待講演)

〔図書〕(計 件)

〔産業財産権〕

出願状況 (計 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況（計 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

三松 佳彦 (MITSUMATSU, Yoshihiko)
中央大学・理工学部・教授
研究者番号： 7 0 1 9 0 7 2 5

(2) 研究分担者

三好 重明 (MIYOSHI, Shigeaki)
中央大学・理工学部・教授
研究者番号： 6 0 1 6 6 2 1 2

高倉 樹 (TAKAKURA, Tatsuru)
中央大学・理工学部・准教授
研究者番号： 3 0 2 6 8 9 7 4

(3) 連携研究者

松元 重則 (MATSUMOTO, Shigenori)
日本大学・理工学部・教授
研究者番号： 8 0 0 6 0 1 4 3

坪井 俊 (TSUBOI, Takashi)
東京大学・数理科学研究科・教授
研究者番号： 4 0 1 1 4 5 6 6

木村 芳文 (KIMURA, Yoshifumi)
名古屋大学・多元数理科学研究科・教授
研究者番号： 7 0 1 6 9 9 4 4

森吉 仁志 (MORIYOSHI, Hitoshi)
名古屋大学・多元数理科学研究科・教授
研究者番号： 0 0 2 3 9 7 0 8

太田 啓史 (OHTA, Hiroshi)
名古屋大学・多元数理科学研究科・教授
研究者番号： 5 0 2 2 3 8 3 9