

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 13 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2010～2013

課題番号：22340017

研究課題名(和文) 複雑な系の上のマルコフ連鎖とその極限過程の研究

研究課題名(英文) Markov chains on disordered media and their scaling limits

研究代表者

熊谷 隆 (Kumagai, Takashi)

京都大学・数理解析研究所・教授

研究者番号：90234509

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 12,900,000円、(間接経費) 3,870,000円

研究成果の概要(和文)：確率論的手法と実解析的手法を融合的に用いることで、複雑な系の上のマルコフ連鎖とその極限過程を統一的に解析する研究を行った。一般論を展開する観点からは、cycle条件を満たす非対称なマルコフ連鎖の熱核の評価とそのスケール極限の解析、測度付き距離空間上の対称拡散過程に関する熱核の劣ガウス型評価と一般化放物型ハルナック不等式の同値性の証明、飛躍型確率過程の収束理論の構築などの成果を得た。具体例の観点からは、樹木上の臨界確率パーコレーションにバイアス付きランダムウォークを走らせた際の漸近挙動、極限過程の考察を行い、またランダムな有限グラフ上のマルコフ連鎖の混合時間のスケール極限に関する成果を得た。

研究成果の概要(英文)：We analysed Markov chains on disordered media and their scaling limits in a unified manner by using probabilistic and analytic methods. From the viewpoint of constructing general theory, we established the following results; i) heat kernel estimates for non-symmetric Markov chains satisfying some cycle condition and analyzing their scaling limits, ii) equivalence of the sub-Gaussian heat kernel estimates and generalized Parabolic Harnack inequalities on symmetric diffusions for general metric measure spaces, iii) convergence of jump-type processes for general metric measure spaces. From the viewpoint of concrete examples, we established the following results; i) asymptotic behavior and scaling limits of biased random walks on critical percolation clusters (conditioned to survive forever) on trees, ii) convergence of scaled mixing times on Markov chains on random finite graphs.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：確率論 数理物理 解析学 複雑系 統計力学 飛躍型確率過程 国際研究者交流 イギリス：アメリカ  
カナダ：ドイツ

## 1. 研究開始当初の背景

80年代後半以降、フラクタルを典型例とする複雑な系の上に確率過程を構成し、その上に解析学を展開する研究が大きく進展した。特に、申請者と共同研究者による研究で、これらの方法が「安定性」を持つ、すなわち理想的な形状のフラクタルに限らず、何らかの意味で自己相似性に近い構造を持つ図形の上でも有効であることが次第に分かってきた。この流れを受けた研究はこの数年で大きく進展し、現在はパーコレーションクラスターなどの確率モデル上の確率過程の研究が、大変活発に行われている。申請者と共同研究者の研究は、この方面で世界の先端を走っており、その結果、例えば申請者が2010年の夏にフランスの伝統ある夏の学校 St. Flour に講師として招待されるなど、国際的に重要な役割を任されつつある。申請者と共同研究者が当該研究の手法について吟味する中で、複雑な系の上の確率過程論と Dirichlet 形式の方法やポテンシャル論を組み合わせることにより、さらに広い範囲で離散複雑系の解析を推し進め、その連続極限の上の確率過程をも統一的方法で解析できるのではないかという感触を持つに至ったことが、本研究の開始当初の背景である。

## 2. 研究の目的

本研究では、フラクタルやランダムな媒質を典型例とする複雑な系の上で、確率論的手法と実解析的手法を融合させることより汎用性の高い手法を編み出し、離散複雑系とその極限に現れる連続系の上の物理現象を统一的に解析することを大きな目標とする。この目的を達成するために、本研究では以下の3つの研究を柱としたアプローチを行った。

- A) 複雑な系の上の Dirichlet 形式の解析 -- 確率論的手法と実解析的手法の融合 --
- B) 離散複雑系の上のマルコフ連鎖の漸近評価と、その極限過程の解析
- C) 複雑な系の上の飛躍型確率過程の解析とその応用

このうち A)は、B),C)で扱う具体的なモデルの解析に必要となる、汎用性の高い理論構築のための研究であり、本研究の扇の要の位置づけである。それぞれの研究は互いに有機的に結びつき、その相互作用により研究全体を推進させるように務めた。

## 3. 研究の方法

(1)本研究内容について造詣が深く、研究代表者との個人的つながりもある8名の海外共同研究者(Barlow教授、Bass教授、Biskup教授、Z.-Q. Chen教授、J.-D. Deuschel教授、Grigoryan教授、Sturm教授、Hambly講師)を迎え、さらにLawler教授、Saloff-Coste教授らとも招聘や訪問による研究連絡を行

うことで最新情報の提供や関連した手法の紹介を受け、いくつかの共同研究を推し進めた。海外主力研究者との広範なネットワークを生かした共同研究は、本研究の大きな特徴である。

(2)研究目的のA)-C)に合わせて分担者をグループに分け、熊谷が中心となってセミナー、研究集会などで研究交流を行った。各々の専門を生かした形で、広い意味で複雑な系の上のマルコフ連鎖とその極限過程に関連する研究を多面的・有機的に推し進めた。

(3)研究期間中に多くの研究集会を行い(あるいはサポートし)、また代表者、分担者が多くの国際研究集会に招聘された。代表者、分担者が組織委員を務めた国際研究集会として、例えば以下のものが挙げられる。

「第34回 Stochastic Processes and Their Applications」(2010年9月6日-10日,千里ライフサイエンスセンター)

「4th International conference on stochastic analysis and its application」(2010年8月30日-9月3日,関西大学)

Banff 研究集会「Foundation of Stochastic Analysis」(2011年9月18-23日,Banff)

「Nonlocal Operators: Analysis, Probability, Geometry and Applications」(2012年7月9-14日,Bielefeld大学)

「離散幾何解析」(RIMS プロジェクト研究,2012年度)

招待講演に關しての詳細は5.で記すが、前述した St. Flour の他、アメリカ、韓国、クロアチアでの夏の学校・春の学校で講師として当該研究の詳細について講義を行ったことは、当該研究の国際的な関心の高さを裏付けるものである。

## 4. 研究成果

(1)総括： 分担者・連携研究者・海外共同研究者との連携により、離散複雑系とその極限に現れる連続系の上の物理現象を统一的に解析するという目的を、ある程度達成した。当初目標とした研究のうち、cycle 条件を満たす非対称なマルコフ連鎖の熱核の評価とそのスケール極限の解析については、新しい手法と古典的な方法を組み合わせることにより満足の行く結果を出し、論文が雑誌に掲載された。また、Spectral Gromov-Hausdorff 収束という概念を導入して、有限グラフ上のマルコフ連鎖の混合時間のスケール極限に関する成果を挙げ、Erdős-Rényi のランダムグラフなど典型的な複雑系グラフに応用することができたことも大きな成果である。確率論的ポテンシャル論を用いることで、有限グラフの Gaussian free field の maximum の tightness に関する結果を挙げ、またランダムなグラフとスケール極限の研究の一環で、バイアス付きランダムウォークの研究に結びつけるなど、当初予定していなかった方向にも研究が広がるという収穫を得た。これは

ひとえに、国際的な研究者交流を積極的に進め、新たな研究者との共同研究を立ち上げることができたことによる。前述したように当該研究は国際的にも高い評価を受けており、その結果として国際研究集会などで一流の研究者から積極的な共同研究のアプローチを受ける機会が多いことが、更なる進展への追い風となっていると分析できる。

確率論的手法と実解析的手法の融合による一般論展開についても、測度付き距離空間における対称拡散過程に関する熱核の劣ガウス型評価と一般化された放物型ハルナック不等式の同値性の証明や、飛躍型確率過程の収束理論の構築などを果たし、一定の成果を挙げることができた。

以下、代表者、分担者それぞれの主な研究成果を具体的に記す。

#### (2) 熊谷 隆

1 半平面上の優臨界確率パーコレーションクラスターを典型例とするような、ある種の境界付き領域上のランダム媒質に対して、その上のランダムウォークの quenched invariance principle を証明した。(Z.-Q. Chen 氏、D.A. Croydon 氏との共同研究、雑誌に掲載予定)

2 樹木上の臨界確率パーコレーションに絶滅しないという条件付けをしたクラスターを考える。この上のバイアス付きのランダムウォークの漸近挙動を解析し、aging の問題を扱った。ランダムウォークの trapping の影響で、非自明なスケール極限を導出するには指数的時間スケールが必要となる。さらに、backbone に射影した確率過程のスケール極限として extremal process の逆過程が現れる事が判明した。(D.A. Croydon 氏、A. Fribergh 氏との共同研究)

3 一般の測度付き距離空間で距離が測地距離とは限らないような範疇で、対称拡散過程に関する熱核の劣ガウス型評価と、一般化された放物型ハルナック不等式の同値性を証明した。(M.T. Barlow 氏、A. Grigor'yan 氏との共同研究)

#### (3) 相川弘明

1 除外集合を許した Harnack 連鎖に対する Harnack 不等式を示した。Intrinsic Ultracontractivity を容量的幅と Green 関数により導いた。

2 古典的な Harnack 原理を拡張し、途中で障害物がある場合でも同様の結果が得られる条件を発見した。容量的幅を拡張された Harnack 原理によって評価し、箱議論を精密に行うことにより対数型の連続率を持つ Hölder 領域に対して、境界 Harnack 原理を導いた。

3 Dirichlet 問題に関して境界関数と解の連続率について研究した。古典的な Harnack 原理を拡張し、途中で障害物がある場合でも同様の結果が得られる条件を見つけた。

#### (4) 重川一郎

1 マルコフ半群の  $p$  乗可積分な空間における収束性を調べ、半群の超縮小性の仮定の下で、収束の指数オーダーが  $p$  に依らないことを示した。また実際に  $p$  に依存する例を構成し、スペクトルを完全に決定することに依って  $p$  への依存性を示した。

2 非対称なマルコフ過程のうち生成作用素が正規作用素となるものを考察し、扇形条件を満たす Dirichlet 形式が対応する条件をスペクトルで与え、スペクトルが完全に決定できる具体的な例の計算を行った。

3 リーマン多体上の非対称な拡散作用素に対する一意性の問題を、 $L^2$  の場合と  $L^p$  の場合とで十分条件をドリフトの発散の有界性と内向き増大度が距離に関して線形という形で与えた。これを利用して、生成作用素の定義域の決定も行った。

#### (5) 木上淳

1 距離・測度空間の tree による parametrization の定義を与え、距離が parametrization と compatible であるための条件、2つの距離が互いに quasisymmetric になるための必要十分条件、測度が距離に対して volume doubling になるための必要十分条件などを考察した。

2 Tree によって parametrize された距離空間について、その上の measure が volume doubling になるための必要十分条件、metric が quasisymmetric になるための必要十分条件を明らかにし、特に正方形から無限個の長方形を抜いた空間に対して応用した。

3 Sierpinski casket (SC) の conformal dimension について研究を行い、invisible set という概念を導入して、SC の conformal dimension の上からの評価を得た。さらに、Keith-Kleiner による conformal dimension の  $p$ -form による特徴づけを用いて spectral dimension との関係を示した。

#### (6) 日野正訓

1 フラクタル集合上の局所ディリクレ形式に付随する非自明な内在的距離を考察し、幾何学的な測地距離との関係を研究した。

2 一般の強局所正則ディリクレ形式に対して可測的リーマン構造が付随することを示し、確率解析への応用を与えた。

3 フラクタルのような集合においても、強局所正則 Dirichlet 形式を定める関数空間には一種の微分構造が導入され、接空間の基底をなす関数の組が常に存在することを示した。

#### (7) 上村稔大(平成22年度)

下に有界な正則なセミディリクレ形式を用いて非対称なハント過程を構成し、さらにそれが適当な除外集合を除いた任意の出発点に持つ確率に対して、マルチンゲール問題の

解となっていることを証明した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 22 件)すべて査読有り

- 1 H. Aikawa, Extended Harnack inequalities with exceptional sets and a boundary Harnack principle. *J. Anal. Math.*, to appear. <http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~aik/research/AikawaPapers/ehi.pdf>
- 2 Sei. Kusuoka and I. Shigekawa, Exponential convergence of Markovian semigroups and their spectra on  $L^p$ -spaces. *Kyoto Journal of Mathematics*, to appear. <https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~ichiro/>
- 3 D.A. Croydon, A. Fribergh and T. Kumagai, Biased random walk on critical Galton-Watson trees conditioned to survive, *Probab. Theory Relat. Fields*, 157 (2013), 453-507. DOI: 10.1007/s00440-012-0462-z
- 4 T. Kumagai and Zeitouni, Fluctuations of recentered maxima of discrete Gaussian Free Fields on a class of recurrent graphs. *Electron. Commun. Probab.*, 18 (2013), 1-12. DOI: 10.1214/ECP.v18-2632
- 5 J.-D. Deuschel and T. Kumagai, Markov chain approximations to non-symmetric diffusions with bounded coefficients. *Comm. Pure Appl. Math.* 66 (2013), no. 6, 821--866. DOI: 10.1002/cpa.21447
- 6 Z.-Q. Chen, P. Kim and T. Kumagai, Discrete Approximation of Symmetric Jump Processes on Metric Measure Spaces, *Probab. Theory Relat. Fields* 155 (2013), 703--749. DOI: 10.1007/s00440-012-0411-x
- 7 M. Hino, Upper estimate of martingale dimension for self-similar fractals. *Probab. Theory Relat. Fields* 156 (2013), 739-793. DOI: 10.1007/s00440-012-044
- 8 M. Hino, Measurable Riemannian structures associated with strong local Dirichlet forms. *Math. Nachr.* 286 (2013), 1466-1478. DOI: 10.1002/mana.201200061
- 9 J. Kigami, Resistance forms, quasi-symmetric maps and heat kernel estimates. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 216, 2012, vi+132 pp. DOI: 10.1090/S0065-9266-2011-00632-5
- 10 M.T. Barlow, A. Grigor'yan and T. Kumagai, On the equivalence of parabolic Harnack inequalities and heat kernel estimates, *J. Math. Soc. Japan*, 64 (2012), 1091-1146. DOI: 10.2969/jmsj/06441091
- 11 D.A. Croydon, B.M. Hambly and T. Kumagai, Convergence of mixing times for sequences of random walks on finite graphs. *Electron. J. Probab.*, 17 (2012), no. 3, 1-32. DOI: 10.1214/EJP.v17-1705

- 12 M. Fukushima and T. Uemura, Jump-type Hunt processes generated by lower bounded semi-Dirichlet forms, *Ann. Probab.* (2012), 858-889. DOI: 10.1214/10-AOP633
- 13 I. Shigekawa, Semigroups preserving a convex set in a Banach space. *Kyoto J. Math.* 51 (2011), 647-672. DOI: 10.1215/21562261-1299918
- 14 M. Hino, Dirichlet spaces on H-convex sets in Wiener space. *Bull. Sci. Math.* 135 (2011), 667-683. DOI: 10.1016/j.bulsci.2011.07.008
- 15 Z.-Q. Chen, P. Kim and T. Kumagai, Global Heat Kernel Estimates for Symmetric Jump Processes. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 363 (2011), no. 9, 5021--5055. DOI: 10.1090/S0002-9947-2011-05408-5
- 16 R.F. Bass, T. Kumagai and T. Uemura, Convergence of symmetric Markov chains on  $Z^d$ . *Probab. Theory Relat. Fields*, 148 (2010), 107--140. DOI: 10.1007/s00440-009-0224-8
- 17 Z.-Q. Chen and T. Kumagai, A priori Hölder estimate, parabolic Harnack principle and heat kernel estimates for diffusions with jumps. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 26 (2010), 551-589. DOI: 10.4171/RMI/609
- 18 M.T. Barlow, R.F. Bass, T. Kumagai and A. Teplyaev, Uniqueness of Brownian motion on Sierpinski carpets, *J. European Math. Soc.*, 12 (2010), 655-701. DOI: 10.4171/JEMS/211
- 19 H. Aikawa, Modulus of continuity of the Dirichlet solutions, *Bull. London Math. Soc.* 42 (2010), 857-867. DOI: 10.1112/blms/bdq040
- 20 J. Kigami, Dirichlet forms and associated heat kernels on the Cantor set induced by random walks on trees, *Adv. Math.* 225 (2010), 2674-2730. DOI: 10.1016/j.aim.2010.04.029
- 21 K. Hara and M. Hino, Fractional order Taylor's series and the neo-classical inequality, *Bull. London Math. Soc.* 42 (2010), 467-477. DOI: 10.1112/blms/bdq013
- 22 T. Uemura, On exit time from balls of jump-type symmetric Markov processes, *Acta. Math. Sin. (Engl. Ser.)*, 26 (2010), 185-192. DOI: 10.1007/s10114-010-6173-4

[学会発表](計 32 件)

- 1 熊谷隆, Biased random walk on critical Galton-Watson trees conditioned to survive, *Random media*, 2013年09月16日, TU-Berlin(ドイツ), 招待講演
- 2 熊谷隆, Fluctuations of recentered maxima of discrete Gaussian Free Fields on a class of recurrent graphs, *AMC 2013 in BEXCO*, 2013年7月1日, BEXCO, 釜山(韓国),

招待講演

3 熊谷隆, On the precise Gaussian heat kernel lower bounds, IWPT2013 at Sapporo, 2013年02月04日, 北海道大学, 招待講演

4 熊谷隆, Fluctuations of recentered maxima of discrete Gaussian Free Fields on a class of recurrent graphs, 2012 Advances on fractals and related topics at CUHK, 2012年12月12日, 香港中文大学(香港), 招待講演

5 木上 淳, Partition, volume doubling property and quasisymmetry on metric measure spaces, International Conference on Advances on Fractals and Related Topics, 2012年12月12日, 香港中文大学(香港), 招待講演

6 日野 正訓, Geodesic distances and intrinsic distances on some fractal sets, International Conference on Advances on Fractals and Related Topics, 2012年12月11日, 香港中文大学(香港), 招待講演

7 重川 一郎, On spectra of 1-dimensional diffusion operators, 量子場の数理解析とその周辺, 2012年11月15日, 京都大学数理解析研究所, 招待講演

8 熊谷隆, Random walks on disordered media and their scaling limits, 日本数学会、KMS-MSJ Joint Meeting 2012, 2012年09月17日, 九州大学, 招待講演

9 相川 弘明, Extended Harnack inequalities with exceptional sets and a boundary Harnack principle, Potential Theory and its Related Fields, 2012年09月07日, 京都大学数理解析研究所, 招待講演

10 日野 正訓, Geodesic distances and intrinsic distances on some fractal sets, Potential Theory and its Related Fields, 2012年09月04日, 京都大学数理解析研究所, 招待講演

11 重川 一郎, Exponential Convergence of Markov processes, The 8th Workshop on Markov processes and related topics, 2012年07月20日, Beijing Normal University, CHINA, 招待講演

12 相川 弘明, Extended Harnack inequalities with exceptional sets and a boundary Harnack principle, International Conference on Complex Analysis and Related Topics, The 13th Romanian-Finnish Seminar, 2012年06月28日, Ploiesti, Romania, 招待講演

13 木上 淳, Analysis on Fractals, The Applications of Fractal Geometry and Dynamical Systems Theory to Biology & Physics, 2012年06月20日, UC. Riverside (アメリカ), 招待講演

14 熊谷隆, Random walks on graphs and applications to random media, Spring School in Probability at Dubrovnik (連続講演), 2012年04月23日~04月27日,

Dubrovnik, Croatia, 招待講演

15 日野正訓, ディリクレ形式の指数とその応用, 日本数学会年会, 2012年03月26日, 東京理科大学, 招待講演

16 木上 淳, Partition, volume doubling property and quasi symmetry on metric spaces, The 1078th AMS Meeting, 2012年03月08日, ハワイ大学(アメリカ), 招待講演

17 相川 弘明, Extended Harnack inequality, The 1078th AMS Meeting, 2012年03月03日, ハワイ大学(アメリカ), 招待講演

18 木上 淳, Dirichlet forms on a noncompact Cantor set and random walk on its defining tree, Stochastic Analysis (Banff Meeting), 2011年09月21日, Banff International Research Station (カナダ), 招待講演

19 日野正訓, Differential-like structures associated with strong local Dirichlet forms, 4th Cornell Conference on Analysis, Probability, and Mathematical Physics on Fractals, 2011年09月11日, コーネル大学(アメリカ), 招待講演

20 重川 一郎, The spectrum of non-symmetric operators and Markov processes, 5th international conferences on Stochastic Analysis and its Applications, 2011年09月09日, ボン大学(ドイツ), 招待講演

21 熊谷隆, Markov chain approximations to non-symmetric diffusions with bounded coefficients, 5th international conferences on Stochastic Analysis and its Applications, 2011年09月05日, ボン大学(ドイツ), 招待講演

22 熊谷隆, Random walks on graphs and applications to random media (9 Lectures), The First NIMS Summer School in Probability, 2011年08月15日~2011年08月26日, Daejeon (韓国), 招待講演

23 相川 弘明, Potential analysis on non-smooth domain, Complex analysis and potential theory, 2011年06月21日, モントリオール大学(カナダ), 招待講演

24 熊谷隆, Convergence of mixing times for sequences of random walks on graphs, Stochastic Analysis (Oberwolfach Meeting), 2011年06月02日, Oberwolfach(ドイツ), 招待講演

25 日野正訓, Martingale dimensions and derivatives for some fractals, Conference in Memory of Paul Malliavin, 2010年10月4日, Universite de Bourgogne (フランス), 招待講演

26 相川 弘明, Modulus of continuity of the Dirichlet solutions, 日本数学会秋季総合分科会, 2010年9月22日, 名古屋大学, 招待講演

27 日野正訓, Martingale dimensions for self-similar fractals, 34th conference on

Stochastic Processes and Their Applications, 2010年9月10日, 千里ライフサイエンスセンター, 招待講演

28 熊谷隆, Convergence of symmetric Markov chains on  $Z^d$ , 34th conference on Stochastic Processes and Their Applications, 2010年9月7日, 千里ライフサイエンスセンター, 招待講演

29 木上 淳, Dirichlet forms and heat kernels on the Cantor sets as the traces of Random walks on trees, 4th International Conference on Stochastic Analysis and Its applications, 2010年9月3日, 関西大学, 招待講演

30 相川 弘明, Boundary Harnack principle and Carleson estimate, 4th International Conference on Stochastic Analysis and Its applications, 2010年8月31日, 関西大学, 招待講演

31熊谷隆, Random walks on disordered media and their scaling limits (8 Lectures), 40th Probability Summer School, St. Flour, 2010年7月4-17日, St. Flour (フランス), 招待講演

32 木上 淳, Resistance forms, quasi-symmetric maps and heat kernel estimates, Analysis and Probability on Fractals, 2010年6月1-4日, Fourier Institute, Grenoble France, 招待講演

〔図書〕(計 1 件)

T. Kumagai, Random Walks on Disordered Media and their Scaling Limits. Lect. Notes in Math., Vol. 2101, École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XL--2010. Springer, New York, (2014). 147 pages.

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
取得年月日:  
国内外の別:

〔その他〕

ホームページ等  
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kumagai/kumpre.html>

## 6. 研究組織

### (1)研究代表者

熊谷 隆 (KUMAGAI TAKASHI)  
京都大学・数理解析研究所・教授  
研究者番号: 90234509

### (2)研究分担者

相川 弘明 (AIKAWA HIROAKI)  
北海道大学・大学院理学研究院・教授  
研究者番号: 20137889

重川 一郎 (SHIGEKAWA ICHIRO)  
京都大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号: 00127234

木上 淳 (KIGAMI JUN)  
京都大学・大学院情報学研究科・教授  
研究者番号: 90202035

日野正訓 (HINO MASANORI)  
(平成 24 年度末まで)  
京都大学・大学院情報学研究科・准教授  
研究者番号: 40303888  
(平成 25 年度から)  
大阪大学・基礎工学部・教授  
研究者番号: 40303888

### (平成 22 年度のみ)

上村稔大 (UEMURA TOSHIHIRO)  
関西大学・システム理工学部・教授  
研究者番号: 30285332

### (3)連携研究者

舟木 直久 (FUNAKI TADAHISA)  
東京大学・大学院数理科学研究科・教授  
研究者番号: 60112174

竹田 雅好 (TAKEDA MASAYOSHI)  
東北大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号: 30179650

小谷 元子 (KOTANI MOTOKO)  
東北大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号: 50230024

吉田 伸生 (YOSHIDA NOBUO)  
(平成 24 年度まで)  
京都大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号: 40240303  
(平成 25 年度から)  
名古屋大学・多元数理科学研究科・教授

### (平成 23 年度から)

上村稔大 (UEMURA TOSHIHIRO)  
関西大学・システム理工学部・教授  
研究者番号: 30285332