

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 16 日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2010～2013

課題番号：22340020

研究課題名(和文)行列式構造をもつ確率過程の研究

研究課題名(英文)Study on stochastic processes with determinantal structure

研究代表者

白井 朋之(Shirai, Tomoyuki)

九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・教授

研究者番号：70302932

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 10,600,000円、(間接経費) 3,180,000円

研究成果の概要(和文)：ある種のランダムな行列の固有値間の相関をあらわす相関関数は行列式を用いてあらわすことができる。相関が行列式で与えられるランダムな点の配置は反発性を有しており行列式点過程とよばれ、多くの数学的な対象がこの点過程により記述され詳しい解析が可能になる。行列式点過程の典型例であるギニブル点過程の詳しい解析を行ない、その一つの応用例としてギニブル点過程を従来のポアソン点過程のかわりに携帯ネットワークの基地局のモデルとして用いて解析を行なった。このように行列式点過程について理論と応用の両面から種々の研究を行った。

研究成果の概要(英文)：Correlation functions of the eigenvalues of certain random matrices can be expressed by using determinant. A point configuration whose correlation functions are determinants has repulsive property and is called a determinantal point process. Many mathematical objects can be described as a determinantal point process and analyzed precisely. We study the Ginibre point process, which is a typical model of determinantal point process, and we use this determinantal point process instead of poisson point process as a model of base stations of a cellular network and analyze it. We investigated determinantal point processes from both theoretical and applied mathematical points of view.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：Ginibre 点過程 行列式点過程 Palm 測度 絶対連続性 相関関数 ランダム行列 アルファ行列式

1. 研究開始当初の背景

数理統計学の Fischer, Wishart らによって導入されたランダム行列は 1960 年代の数理物理学者によるエネルギー準位の研究において詳しく研究された。原子核のような複雑な多体系においてハミルトニアンが特定されない状況で、対称性だけの仮定からウィグナーの半円則に代表される詳しい固有値の分布が計算された。その後、1990年代になって、量子重力や量子カオスの研究の流れの中で改めてランダム行列が注目を集めて、さらに詳しく研究がなされた。その過程で、相関関数が行列式で表されるという性質を抽象化することによって、行列式構造をもつ確率的な対象(典型的には行列式ランダム点場)に注目が集まり、例えば1960年代初めにウラムによって出された置換の最長部分列に関する予想がランダム行列の最大固有値との関連を明らかにするという方法により意外な形で解決された。

上で述べた行列式を相関関数としてもつランダム点場のことを、行列式点過程という。代表者白井は高橋陽一郎(当時京大数理研)とその行列式点過程への一般化とその性質を詳しく調べた。ほぼ同時期に独立に A.Soshnikov も行列式点過程の一般化を行なっている。また、A.Borodin-G.Olshanski や R.Lyons とも表現論や離散確率論などの異なるバックグラウンドをもって行列式点過程の研究を行ってきた。白井・高橋の論文では、行列式点過程のみならず、パーマメント点過程やそれらの一般化である行列式点過程の存在問題についても論じている。行列式点過程の存在問題は、行列式とパーマメントの1パラメータ補間に相当する行列変数関数の正値性と深く関わり、また表現論的な問題とも関連して、以後多くの研究がなされておき、現在も進行中である。

2. 研究の目的

本研究の目的は、上で述べたような数学や物理で研究されてきた多くの対象に内在する行列式型構造、特にランダム行列などに内在する「ランダムな行列式型構造」を抽象化して得られた行列式点過程の統一的な視点を利用して、この理論をさらに発展させ、その方法論をフィードバックしながら個々の具体的な問題に新たな視点を与えつつ、特に次の点を強調した研究を行なうことにある。

- (1) 時間発展を伴う行列式型構造の研究。
- (2) 行列式型構造を持つ確率過程の関数論的手法による研究。
- (3) 行列式への一般化の問題。

- (1) 時間発展を伴う行列式型構造のもっとも典型的な例はダイソンモデルである。ダイソンモデルはランダム行列(特に

ガウシアンユニタリアンサンプル)の固有値に自然に時間発展を導入したものである。このモデルの各時間ごとには、行列式点過程の構造をもつが、時間を導入すると時空間の確率過程と見なすことができる。この視点でこの確率過程の性質を調べることを目的とする。

- (2) ギニブルランダム行列は各行列要素が複素ガウス分布に従うランダム行列で、そのランダムな複素固有値とその行列サイズ無限大の極限は、行列式点過程とみなすことができる。この行列式点過程は物理的にはある特別な温度におけるプラズマのモデルと考えることができ、その点配置の詳しい性質を調べることは物理的にも意義がある。これらの詳しい性質を調べる際、複素平面上の点過程であることから、それらを零点としてもつ正則関数(無限積表現)を用いることはしばしば有効になる。この点を強調して研究する方向性は重要である。
- (3) 行列式の正値性の問題は白井・高橋の論文以来、行列式点過程の存在を保証するために、重要な問題であった。一方、点過程の問題を離れて独立した対象としても、行列式は表現論的に自然な対象である。様々な観点から行列式を研究することにより、その正値性の問題へアプローチするのが目的である。

3. 研究の方法

- (1) ダイソンモデルは1次元空間の中に無限個の粒子があるモデルで、その時間発展を研究する際に時空間の相関関数を考えるのが都合がよい。実際、時間を固定して得られる粒子系はその相関関数に行列式構造を持っているが、時空間に拡張してもその構造を保つことが知られている。この性質を利用して、無限粒子系の時間発展を定常分布から出発するモデルのみならず、一般の初期条件からスタートするモデルも考える。その際に時空間相関関数と、初期配置に相当する点を零点とする整関数を用いることにより、関数論的な手法を用いて研究する。
- (2) (1)でも既に述べたが、特に2次元の行列式構造をもつ粒子系の場合には、関数論的考察がしばしば役に立つことがある。例えば、Ginibre 点過程は2次元平面内の行列式点過程であるが、粒子を零点とみなしたときの無限積は重要な役割を果たす。特に絶対収束しない無限積を考えることは、遠方で発散している対数ポテンシャルのある種のキャンセレーションを調べることに相当する。このような方法で Ginibre 点過程の詳しい性質を調

べる．また，ランダムな正則関数の零点を点過程と見なしてその極限定理について議論する．その際に正則関数値の確率変数としての極限定理を示して，その汎関数の収束の形で問題を捉える．

- (3) 行列式点過程は相関関数が行列式で与えられる点過程であるが，相関関数の部分を行列式の一般化である行列式に置きかえることによって，ある正值性の条件をみたせば行列式点過程の一般化である行列式点過程を定義することができる．行列式の正值性の問題は長い間種々の方法で考えてきた問題であるが，非負定値行列の空間における最適化問題の観点から，数値計算も用いて新たな研究の方向を模索する．

4．研究成果

- (1) ランダムな正則関数の零点に関する関数型中心極限定理を証明した．また，セゲー核に対するウィーナー積分の零点が行列式点過程になることを示して，そこへの中心極限定理からランダムなスチルチェス積分の零点が行列式点過程に収束することを示した．
- (2) Ginibre 点過程は定数磁場つきシュレーディンガー作用素の最小固有値(ランダウ準位)に属する固有空間(指数核を再生核とする再生核ヒルベルト空間)に付随する行列式点過程になる．最小固有値でない場合についても固有空間には同様の構造があり，それに付随する行列式点過程を構成できる．その行列式点過程の特に点の個数を数える確率変数に関して，その分散の漸近挙動を調べた．
- (3) 独立同分布ガウス確率変数を係数とするランダムべき級数を考えて，その零点の相関関数が行列式の一般化であるパフィアンで表現できることを示した(松本詔氏(名古屋大)との共同研究)．またその証明の過程で，(実)コーシー核を共分散関数とするガウス過程の絶対値の積モーメントに関するパフィアン表現も得た．
- (4) 行列式を行列変数の関数とみなして，非負定値行列のなす閉凸錐上での最小値問題を考えた．各行列サイズに対して，最小値が非負になるの範囲を求めるのは一般的には難しいが，多項式最適化問題とみなして，いわゆる SDP 緩和という方法を用いて半正定値計画法の枠組みに落して，SDP ソルバーを用いて数値計算を行った．現在の所，数値計算で与えられる下からの評価が上からの厳密な評価とマッチしているという状況証拠を得た段階ではあるが，少なくともこの問題に対する新たな視点を与えた．
- (5) Ginibre 点過程が従来研究されてきたポアソン点過程に比べて点同士が反発的であることに着目して，携帯ネットワーク

の基地局のモデルとして用いて，その被覆確率についての考察を行い，ポアソン点過程の場合の被覆確率との比較も行った．

5．主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 6 件)

1. Tomoyuki Shirai,
Limit theorems for random analytic functions and their zeros,
RIMS Kokyuroku Bessatsu 34 (2012),
335-359. (refereed)
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu/B34-contents.pdf>
2. Fumio Hiroshima, Itaru Sasaki Tomoyuki Shirai and Akito Suzuki,
Note on the spectrum of discrete Schrodinger operators,
Journal of Math-for-Industry 5 (2012B-4), 105--108. (refereed)
<http://j-mi.org/articles/index/11>
3. Takayuki Osogami, Tomoyuki Shirai and Hayato Waki,
Remarks on τ -determinants via SDP relaxation,
Journal of Math-for-Industry 5 (2013A-1), 1-10. (refereed)
<http://j-mi.org/articles/index/14>
4. Sho Matsumoto and Tomoyuki Shirai,
Correlation functions for zeros of a Gaussian power series and Pfaffians,
Electronic Journal of Probability 18 (2013) no.49, 1-18. (refereed)
DOI: 10.1214/EJP.v18-2545
<http://ejp.ejpecp.org/article/view/2545>
5. Makoto Katori and Hideki Tanemura,
Complex Brownian motion representation of the Dyson model,
Electronic Communications in Probability 18 (2013) no.4, 1-16. (refereed)
DOI: 10.1214/ECP.v18-2554
<http://ecp.ejpecp.org/article/view/2554>
6. Makoto Katori and Hideki Tanemura,
Noncolliding squared Bessel

processes,
Journal of Statistical Physics 142
(2010) 592-615. (refereed)
DOI:10.1007/s10955-011-0117-y
<http://link.springer.com/article/10.1007/s10955-011-0117-y>

[学会発表](計 17 件)

Tomoyuki Shirai,
Determinantal point processes and the zeros of analytic functions, "Functions in Number Theory and Their Probabilistic Aspects", Kyoto University, 2010年12月.

Tomoyuki Shirai,
On the zeros of certain complex Wiener integrals, 伊都確率論シンポジウム, 九州大, 2011年1月.

Tomoyuki Shirai,
Random analytic functions and their zeros, analysis on Graphs in sendai, 東北大, 2011年2月.

Tomoyuki Shirai,
Random analytic functions and their zeros, The Eve of IMI and FM, 九州大, 2011年3月.

Tomoyuki Shirai,
Positivity for α -determinant via SDP relaxation, IBM 東京基礎件, 2011年9月.

Tomoyuki Shirai,
Ginibre point processes and its Palm measures: absolute continuity and singularity, 10th Workshop on Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems, 高知大, 2011年12月.

Tomoyuki Shirai,
ガウス型べき級数の零点過程の相関関数, 研究集会「確率論シンポジウム」京都大数理研, 2012年12月.

Tomoyuki Shirai,
On the zeros of random analytic functions, 研究集会「マルコフ過程と確率解析」京都大理学部, 2013年1月.

Tomoyuki Shirai,
Correlation functions for zeros of a Gaussian power series and Pfaffians, Seminars on determinantal processes and related topics, Technische

Universitat Munchen, 2013年3月.

Tomoyuki Shirai,
Zeros of a certain Gaussian power series, "the 8th Jikji Workshop "Infinite Dimensional Analysis and Quantum Probability", NIMS, Daejeon, Korea, 2013年8月.

Tomoyuki Shirai,
Fermion and boson point processes and related topics, 量子場の数理とその周辺, 京都大数理研, 2013年10月.

Tomoyuki Shirai,
Applications of determinantal point processes, FMI2013 "The Impact of Applications on Mathematics", 九州大西新プラザ, 2013年11月.

Tomoyuki Shirai,
Remarks on α -determinantal point fields, The 12th workshop on Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems, 東京大数理科学研究科, 2013年11月.

Tomoyuki Shirai,
Cellular network model and α -Ginibre point processes, Workshop on "Random analytic functions, random matrices, and determinantal processes", 九州大伊都, 2013年11月.

Tomoyuki Shirai,
Alpha-determinantal point field associated with Green kernel, 研究会「確率論シンポジウム」, 京都大数理研, 2013年12月.

Makoto Katori,
Vicious Brownian motion, O'Connell's process, and equilibrium Toda lattice, EPSRC Symposium Workshop, "Interacting particle systems, growth models and random matrices", The University of Warwick, 2012年3月.

Hideki Tanemura,
Stochastic differential equations related to soft-edge scaling limit, EPSRC Symposium Workshop, "Interacting particle systems, growth models and random matrices", The University of Warwick, 2012年3月.

〔図書〕(計 1 件)

白井 朋之・香取 眞理，丸善出版，
確率論ハンドブック，第 11 章確率
論 と 数 理 物 理 (SLE
(Schramm-Loewner-Evolution)
(分担執筆)，2012 年．

ホームページ等

<http://imi.kyushu-u.ac.jp/~shirai/>

6．研究組織

(1)研究代表者

白井 朋之 (SHIRAI, Tomoyuki)
九州大学・マス・フォア・インダストリ研
究所・教授
研究者番号：70302932

(2)研究分担者

種村 秀紀 (TANEMURA Hideki)
千葉大学・大学院理学系研究科・教授
研究者番号：40217162

香取 眞理 (KATORI Makoto)
中央大学・理工学部・教授
研究者番号：60202016

(3)連携研究者

長田 博文 (OSADA Hirofumi)
九州大学・大学院数理学研究院・教授
研究者番号：20177207