

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 3 日現在

機関番号：34316

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2010～2013

課題番号：22340022

研究課題名(和文) 散逸系の局在パターン生成における非局所的効果の数理的研究と応用

研究課題名(英文) Mathematical studies for nonlocal effect on emergence of localized patterns in dissipative systems and applications

研究代表者

森田 善久 (Morita, Yoshihisa)

龍谷大学・理工学部・教授

研究者番号：10192783

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 9,800,000円、(間接経費) 2,940,000円

研究成果の概要(和文)：様々な空間的パターンを記述する反応拡散系に代表される散逸系のモデル方程式において、パターン形成に対応する空間的構造をもった解の存在や安定性が研究されている。今回の研究では、局在パターンとよばれるある領域に拡散物質が集中化する現象において、モデル方程式のもつ非局所的効果の役割を数学的に研究し、その数理的メカニズムを明らかにした。具体的には、2つの未知変数の積分量の和が保存される反応拡散系において、局在パターンを表す定常解の安定性が積分項による非局所効果に依存していることを数学的に証明した。さらにその手法を他のモデル方程式の研究にも応用し、安定性に関する新しい知見を与えた。

研究成果の概要(英文)：There are various dissipative systems which are proposed as mathematical models describing pattern formations. In particular, corresponding solutions to pattern formations of reaction-diffusion systems have been much studied. In this research we have shown a new mathematical mechanism for nonlocal effects working in emergence of localized patterns. More specifically, we have studied 2-component reaction-diffusion systems with conservation of mass and proved that the nonlocal effect coming from the mass conservation is connected to the stability of the localized pattern. We also have developed the mathematical method and applied it to other model equations.

研究分野：数学

科研費の分科・細目：応用数学・数学基礎

キーワード：散逸系 局在パターン 非局所効果 反応拡散系 パターン形成 安定性解析 分岐解析 非線形偏微分方程式

1. 研究開始当初の背景

BZ 反応を代表とする化学反応系では、空間的パターンの自発的生成が観測されることは有名である。また、生体内の細胞レベルの現象においても複雑な生化学反応の結果として細胞極性のような局在パターンが自発的に生成する。一方、超伝導のような量子的効果が働く物理現象でも、外部磁場などの効果により巨視的な空間構造をもったパターンが生成することが知られている。このようなミクロレベルの複雑な相互作用を持つ系において、ある種の秩序をもった空間的構造が自発的に発生する現象の理解のため、現象の本質的な役割をする変数にのみ着目してモデル化された現象論的モデル方程式が重要な役割を果たすが、その数学的メカニズムとして非局所的な効果が重要であることが知られている。しかし、個別のモデル方程式に対する研究に偏り、統一的な観点からの数学的な研究が望まれていた。

2. 研究の目的

今回の研究は、エネルギー散逸を伴う系において提案されている局在パターンの生成に関する現象論的モデルに焦点を当て、個別のモデル方程式の研究を基にしながらも、局在パターンが非局所的効果によって生成されるメカニズムについて、数学的な研究を深め、数学の解析手法の開発と応用とともにモデル方程式を統一的に視る数理的視点を提供することを目的とする。

具体的には、以下のことを研究する。

1) 保存量をもつ反応拡散系における局在パターンの存在と安定性の理論を確立する。一様な状態から拡散によって多数のモードが不安化するチューリング不安定化が起こるにも関わらず、最終的には集中化によって一か所にパターンが局在する原理を数学的に明らかにする。また、その解析手法および視点を、他の関連したモデル方程式の研究に適用する。

2) 超伝導の GL 方程式は秩序パラメータと磁場の方程式がカップリングしている。領域が位相的に複雑な場合、安定なパターンが複数個存在し得る。これに外部磁場をかけて、どのようなパターンが最も安定化するかを、領域の位相と外部磁場の関係から明らかにする。磁場は秩序パラメータのフェーズに非局所的に作用する。この作用を制御することによって、パターンが選択される。このメカニズムを数学的に明らかにする。

3) 応用として反応拡散系の局在パターンを制御するような外力を逆に決定する。また、非局所的働きをする変数を加え局在パターンを制御する手法を開発する。

3. 研究の方法

研究グループは非線形偏微分方程式の理論解析のメンバーをコアに、シミュレーシ

ンやモデリングに長けた研究者が加わる体制をとる。テーマごとに、数学的な解析を主に進めるグループ、数値計算やモデリングの観点を取り入れて研究するグループ、数理モデルや数学的結果を現象論的な観点から検証するグループなどに分けて効率的に研究を進めるとともに、グループ間での横断的な議論も取り入れる。これらの活動を推進するために、研究打合せ、セミナーの開催、国内外の研究集会への参加などを行う。必要なら海外からも研究者を招聘し情報交換をする。数学的な解析をコアにしなが、数学的な解析が難しい問題には、シミュレーションや計算機援用解析と呼ばれる手法の導入も検討する。

4. 研究成果

研究の目的にある具体的な目標の 1) について：

保存量をもつ 2 変数反応拡散方程式系の定常問題は非局所項をもつ単独の半線形楕円型方程式に帰着できるので、その解はあるエネルギー関数に関する臨界点として特徴づけることができる。この単独の問題における安定性と、元の 2 変数の反応拡散系における平衡解としての安定性は一般には対応しない。しかし、あるクラスの方程式系では、それぞれの場合の不安定次元を比較することができ、不安定次元と安定性について対応がつくことを証明した。この結果、安定解の空間形状は領域に依存し、1 次元の場合は 1 モードの解しか安定にならないことが明らかになった。これらの安定性の関係を調べるときに Spectral Comparison という手法が使えることを着想し、森田と神保はこの手法を段階に発展させた。

2) について：

超伝導の Ginzburg-Landau (GL) モデルでは、外部磁場の効果が秩序変数の位相に非局所的に作用し、安定な状態が磁場の強さによって変化する。これを数学的に詳しく調べるために、1 次元の周期境界条件の場合を対象を絞り研究した結果、定常問題が非局所項のある秩序変数だけの方程式に帰着され、その安定性に関する結果を得た。

3) について：保存則の無い通常の反応拡散系についても以下のような成果をあげた。小川らは、2 変数の反応拡散系で拡散不安定化によりパターンが生じることが知られているが、適当な 2 次元領域では、ロール解(バンド状の解)と六角パターンなどが共存する。これらは非線形項によりいずれかが安定に出現する。適当な非局所的な制御入力を印可することで不安定であった六角パターンなど所望のパターンを安定化させることができることが示された。さらにウェーブ不安定化で現れるパターンにも同様の制御を行い、六角定在波や六角進行波パターンなども安定化させることができる。

森田と神保らは、やはり 2 変数の拡散不安

定化が起こるような FitzHugh-Nagumo 型の方程式系について, その定常問題が Green 関数で表される非局所的な項をもつ楕円型の方程式になることに着目し, 1) で述べた Spectral Comparison の手法を応用して, 平衡解のまわりの運動を特徴づける不安定多様体の次元について新たな結果を得た.

4) その他の成果について:

数学・数理科学の研究においては, 目標の研究だけでなくその途中で新たな発見が生まれる. 以下はそれらの成果である.

神保は, 位相的に特徴のある領域での研究に関連して, 小さな穴あるいは細いトンネルをもつ領域におけるラプラシアン固有値の漸近公式を得た. また, 磁場のある場合の微分作用の研究に関連して, 滑らかな3次元の領域変形に対するマックスウェルの作用素固有値の摂動公式や, 小さな穴をもつ3次元の領域におけるマックスウェルの作用素固有値の漸近公式を導出した.

小川らは, 反応拡散系の非局所的効果がダイナミクスに与える影響について研究している過程で, 周期進行波解のエックハウス不安定性を発見し, これにより周期進行波解が交互脈動的な進行波にホップ分岐することがわかった. これはスパイラル波の不安定化を議論するための重要な知見を与える結果である.

宮本らは, 定常問題に現れる半線形楕円型方程式の研究に関連して, ソボレフ優臨界の増大度を持つ様々な楕円型偏微分方程式の解構造を解明した. この方程式は, 変分法による一般的な手法が適用できないため, その解構造はいくつかの特殊な場合を除き未解明であった. 球領域上の正值解に制限すると無限個の解の存在など, いくつかの特殊な場合に知られていた性質が, ある程度一般的な非線形項に対しても成り立つことを明らかにした.

町田らは, 超伝導のモデルに関連した成果として, 鉄系超伝導体のもつマルチバンド超伝導性から複数の秩序パラメータ間の結合がジョセフソン結合と同じ数学で記述されることを微視的理論から導出し, ジョセフソン効果, 磁束量子, 量子トンネル効果等の理論を構築した. また, トポロジカル超伝導体と呼ばれるトポロジにより守られた超伝導状態が顕れることが指摘され, この理論的研究を行い, 現象を予言する成果を得ている.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 29 件)

1. C.-N.Chen, S.-Y.Kung and Y. Morita, Planar standing wavefronts in the FitzHugh-Nagumo equations, SIAM Math.Anal., 査読有, Vol.46, 2014, 657-690.

10.1137/130907793.

2. Y. Miyamoto, Structure of the positive solutions for supercritical elliptic equations in a ball, Journal de Mathematiques Pures et Appliquees, 査読有, 2014, 10.1016/j.matpur.2014.02.002.

3. K. Kobayashi, Y. Ota, M. Okumura, S. Yamada and M. Machida, Quantum phases in p-orbital degenerated attractive 1D fermionic optical lattices, Physical Review A, 査読有, Vol.89, 2014, 023625_1-5. 10.1103/PhysRevA.89.023625.

4. S. Jimbo and Y. Morita, Lyapunov function and spectrum comparison for a reaction-diffusion system with mass conservation, Journal of Differential Equations, 査読有, Vol.255, 2013, 1657-1683. 10.1016/j.jde.2013.05.021.

5. S. Jimbo, Hadamard variation for electromagnetic frequencies, Geometric Properties for Parabolic and Elliptic PDE's, INdAM series, 査読有, Vol.2, 2013, 179-200.

6. E. Ijioma, A. Muntean and T. Ogawa, Pattern formation in reverse smouldering combustion: A homogenization, Combustion Theory and Modelling, 査読有, Vol.17, 2013, 185-223. 10.1080/13647830.2012.734860.

7. K. Kashima, T. Ogawa and T. Sakurai, Feedback Stabilization of Non-uniform Spatial Pattern in Reaction-Diffusion Systems, Proceedings of American Control Conference, 査読有, 2013, 3759-3764. <http://www.proceedings.com/19080.html>

8. Y. Miyamoto, Monotonicity of the first eigenvalue and the global bifurcation diagram for the branch of interior peak solutions, Journal of Differential Equations, 査読有, Vol.254, 2013, 342-367. 10.1016/j.jde.2012.08.001.

9. M. Miyamoto, A planar convex domain with many isolated "hot spots" on the boundary, Japan Journal of Industrial applied Mathematics, 査読有, Vol.30, 2013, 145-164. 10.1007/s13160-012-0091-z.

10. Y. Nagai, H. Nakamura and M. Machida, Surface and vortex bound states in topological superconductors, Physica C, 査読有, Vol.494, 2013, 17-19. 10.1016/j.physc.2013.04.018.

11. K. Kobayashi, Y. Ota and M. Machida,

- Analysis of collective excitation for multi band superconductor: Frustrated spin model approach, *Physica C*, 査読有, Vol.494, 2013, 13-16.
10.1016/j.physc.2013.04.057.
12. K. Kobayashi, M. Machida, Y. Ota and F. Nori, Massless collective excitations in frustrated multi-band superconductors, *Physical Review B*, 査読有, Vol.88, 2013, 224516_1-5.
10.1103/PhysRevB.88.224516.
 13. M. Machida, K. Kobayashi and T. Koyama, Quantum phases in intrinsic Josephson junctions: Quantum magnetism analogy, *Physica C*, 査読有, Vol.491, 2013, 44-46.
10.1016/j.physc.2013.02.004.
 14. K. Sugimura and S. Ishihara The mechanical anisotropy in a tissue promotes ordering in hexagonal cell packing, *Development*, Vol.140 (2013) 4091-4101.
10.1242/dev.094060
 15. S. Ishihara, K. Sugimura, S.J. Cox, I. Bonnet, Y. Bellaïche and F. Graner Comparative study of non-invasive force and stress inference in tissue, *Eur. Phys. J. E* Vol.36:45 (2013).
10.1140/epje/i2013-13045-8
 16. Y. Morita, Nonplanar traveling waves of a bistable reaction-diffusion equation in the multi-dimensional space, *RIMS Kokyuroku Bessatsu*, 査読有, B35, 2012, 1-8.
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu-j.html>
 17. Y. Morita, Spectrum comparison for conserved reaction-diffusion system with a variational property, *Journal of Applied Analysis and Computation*, 査読有, Vol.2, 2012, 57-71.
<http://jaac-online.com/index.php/jaac/issue/view/3/showToc>
 18. 森田善久, 超伝導のギンツブルク・ランダウ方程式とその解について, *数理解析研究所講究録*, 査読無, 1776 巻, 2012, 158-162.
<http://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/dspace/bitstream/2433/171754/1/1776-14.pdf>
 19. S. Jimbo, A non-destructive method for damagedetection in steel-concrete structures based on finite eigendata, *Inverse Problems in Science and Engineering*, 査読有, Vol. 20, 2012, 233-270.
10.1080/17415977.2011.605884
 20. T. Ogawa, Oscillatory dynamics in a reaction-diffusion system in the presence of 0:1:2 resonance, *Networks and Heterogeneous Media*, Vol.7, 査読有, 2012, 893-926.
10.3934/nhm.2012.7.893
 21. Y. Miyamoto, Asymptotic transversality and symmetry breaking bifurcation from boundary concentrating solutions, *Annals de l'Institut Henri Poincaré, Analyse Non Linéaire*, 査読有, Vol.29, 2012, 59-81.
10.1016/j.anihpc.2011.09.003
 22. M. Machida, Electromagnetic Wave Emission from Intrinsic Josephson Junction Stacks: A Review of Theory and Simulation, *Journal of Physics: Conference Series*, 査読有, Vol.393, 2012, 012013(1-7).
10.1088/1742-6596/393/1/012013.
 23. S. Ishihara and K. Sugimura Bayesian inference of force dynamics during morphogenesis, *Journal of Theoretical Biology*, 313: (2012), 201-211.
10.1016/j.jtbi.2012.08.017
 24. Y. Miyamoto, Global bifurcation and stable two-phase separation for a phase field model in a disk, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 査読有, Vol.30, 2011, 791-806.
10.3934/dcds.2011.30.791
 25. Y. Miyamoto, Nondegeneracy of the second bifurcating branches for the Chafee-Infante problem on a planar symmetric domain, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 査読有, Vol.139, 2011, 975-984.
10.1090/S0002-9939-2010-10616-0
 26. M. Machida, Orbital Ordering in Low-Moment Ground-State of Parent Compounds in Iron-Based Superconductors, *J.Phys.Soc.Jpn.Suppl.*, 査読有, Vol.80, 2011, SB022.
10.1143/JPSJS.80SB.SB022
 27. Y. Morita and T. Ogawa, Stability and bifurcation of nonconstant solutions to a reaction-diffusion system with conservation of a mass, *Nonlinearity*, 査読有, Vol.23, 2010, 1387-1411.
10.1088/0951-7715/23/6/007
 28. Y. Miyamoto, Global branches from the second eigenvalue for a semilinear Neumann problem in a ball, *Journal of Differential Equations*, 査読有, Vol.249, 2010,1853-1870.
10.1016/j.jde.2010.07.018
 29. M. Machida, Y. Ota, N. Sasa, T. Koyama and H. Matsumoto, Theory and Simulation of Electromagnetic Wave Emission from Intrinsic

Josephson Junctions, Journal of Physics, 査読有, Vol.248, 2010, 012037.
10.1088/1742-6596/248/1/012037

〔学会発表〕(計 28 件)

1. Y. Miyamoto, A structure of the positive radial solutions for a supercritical Neumann problem in a ball, 2014 International Workshop on Nonlinear PDE and Applications, 2014 年 3 月 28 日, 釜山大学, 大韓民国.
2. 宮本安人, 指数増大の非線形項を持つ Dirichlet 問題の正值球対称解の構造について, 日本数学会 2014 年度年会, 2014 年 3 月 15 日~3 月 18 日, 学習院大学.
3. T. Ogawa, Instability of periodic traveling wave solutions to excitable RD systems, RIMS 研究集会「力学系理論の諸分野への応用の新展開」, 2014 年 3 月 10 日~3 月 14 日, 京都大学.
4. 神保秀一, Eigenvalue of Laplacian in a domain with a thin tubular hole, 日本数学会応用数学分科会, 2013 年 9 月 24 日~9 月 27 日, 愛媛大学.
5. 坂元孝志, 小川知之, 3 種反応拡散系の $0:1:2$ ダイナミクスに現れる Bogdanov-Takens 分岐, 日本数学会秋季総合分科会, 2013 年 9 月 24 日~9 月 27 日, 愛媛大学.
6. 宮本安人, ソボレフ優臨界の非線形項を持つ $\varepsilon^2 \Delta u - u^p = 0$ のノイマン問題の正值球対称解の構造について, 日本数学会秋季総合分科会, 2013 年 9 月 24 日~2013 年 9 月 27 日, 愛媛大学.
7. Y. Morita, Spectral comparison and gradient-like property for some reaction-diffusion systems, Czech-Japanese Seminar in Applied Mathematics 2013, 2013 年 9 月 5 日~9 月 8 日, 明治大学, 中野キャンパス.
8. Y. Morita, Spectral comparison for Reaction-Diffusion systems, Equadiff 13, 2013 年 8 月 26 日~8 月 30 日, Charles University in Prague, Czech Republic.
9. T. Ogawa, Pattern Dynamics in R-D systems assisted by global feedbacks, Readilab conference at Carry-le-Rouet "Mathematical Modelling and Analysis in the Life Sciences", 2013 年 6 月 11 日~6 月 13 日, Carry-le-Rouet, France.
10. 宮本安人, SN の赤道に凝集する解からの対称破壊分岐について, 日本数学会 2013 年度年会, 2013 年 3 月 20 日~3 月 23 日, 京都大学吉田キャンパス.
11. 小川知之, 反応拡散系における大域フィードバックとパターン形成, 計測自動制御学会, 2013 年 3 月 5 日~3 月 8 日, アクロス福岡.
12. Y. Morita, Standing Wavefronts for the FitzHugh-Nagumo System, Swiss-Japanese Seminar, 2012 年 12 月 17 日~12 月 19 日, Institute of Mathematics of the University of Zurich.
13. 宮本安人, A planar convex domain with many isolated "hot spots" on the boundary, RIMS 研究集会「偏微分方程式の解の幾何」, 2012 年 11 月 7 日~11 月 9 日, 京都大学数理解析研究所.
14. 宮本安人, 円板領域上の Dirichlet 問題の符号変化解からなる分岐の枝について, 日本数学会 2012 年度秋季総合分科会, 2012 年 9 月 18 日~9 月 21 日, 九州大学伊都キャンパス.
15. 宮本安人, 境界に多数のホットスポットがある凸領域の存在について, 日本数学会 2012 年度秋季総合分科会, 2012 年 9 月 18 日~9 月 21 日, 九州大学伊都キャンパス.
16. Y. Morita, Reaction-diffusion systems with conservation of mass, Nonlinear Partial Differential Equations, Dynamical Systems and their Applications, 2012 年 9 月 3 日~9 月 6 日, 京都大学数理解析研究所.
17. S. Jimbo, Domain variation and electromagnetic frequencies, Nonlinear Partial Differential Equations, Dynamical Systems and Their Applications, 2012 年 9 月 3 日~9 月 6 日, 京都大学数理解析研究所.
18. T. Ogawa, Triple degeneracy in 3-component reaction-diffusion system, Turing Symposium on Morphogenesis, 2012 年 8 月 27 日~2012 年 8 月 31 日, Sendai International Center, Sendai.
19. M. Machida, Electromagnetic Wave Emission from Intrinsic Josephson Junction Stacks: A Review of Theory and Simulation, International Conference Dubna-Nano2012, 2012 年 7 月 9 日~7 月 14 日, Dubna, Russia.
20. Y. Morita, Gradient-like property of a reaction-diffusion system with mass conservation, The 9th AIMS Conference on Dynamical Systems and Applications, 2012 年 7 月 1 日~7 月 5 日, Orland, Florida, USA.
21. Y. Miyamoto, Stable patterns and Morse index one solutions, The 9th AIMS Conference on Dynamical Systems and Applications, 2012 年 7 月 1 日~7 月 5 日, Orland, Florida, USA.
22. M. Machida, Quantum Phases in Intrinsic Josephson Junctions; Quantum Magnetism Analogy, The 8th

- International Symposium on Intrinsic Josephson Effects and Plasma Oscillations in High-Tc Superconductors, 2012年6月10日～2012年6月13日, Cesme, Turkey.
23. 宮本安人, 境界に凝集する解からの対称性破壊分岐について, 日本数学会2012年度年会函数方程式分科会, 2012年3月26日～3月29日, 東京理科大学.
24. T. Ogawa, Triply degenerate interactions in 3-component reaction diffusion system, One Forum, Two cities: Aspect of Nonlinear PDEs Conference, 2011年8月29日～9月2日, Taida Institute for Mathematical Sciences, National Taiwan University, Taiwan.
25. Y. Miyamoto, Nonradial maximizers for a Hénon type problem and symmetry breaking bifurcations for a Liouville-Gel'fand problem with a vanishing coefficient, INdAM Workshop, Geometry of solutions to Parabolic and Elliptic PDEs, 2011年6月20日～24日, Cortona, Italy.
26. S. Jimbo, Domain variation and electromagnetic frequencies, INdAM Workshop, Geometry of solutions to Parabolic and Elliptic PDEs, 2011年6月20日～24日, Cortona, Italy.
27. 宮本安人, 2次元対称領域におけるChafee-Infante問題の分岐解の非退化性について, 日本数学会秋季総合分科会, 2010年9月22日～9月25日, 名古屋大学.
28. Y. Morita, Stability and bifurcation of solutions to a reaction-diffusion system with conservation of mass, The 8th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2010年5月25日～5月28日, Dresden University of Technology, Germany.

〔図書〕(計2件)

1. 郡 宏, 森田善久, 「生物リズムと力学系」, 共立出版, 2011年, pp.192.
2. 神保秀一, 本多尚文, 「位相空間」, 数学書房, 2010年, pp.230.

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.math.ryukoku.ac.jp/~morita/index.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

森田 善久 (MORITA, Yoshihisa)
龍谷大学・理工学部・教授
研究者番号: 10192783

(2) 研究分担者

神保 秀一 (JIMBO, Shuichi)
北海道大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 80201565

小川 知之 (OGAWA, Toshiyuki)
明治大学・先端数理科学研究科・教授
研究者番号: 80211811

宮本 安人 (MIYAMOTO, Yasuhito)
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号: 90374743

町田 昌彦 (MACHIDA, Masahiko)
独立行政法人日本原子力研究開発機構・システム計算科学センター・研究主幹
研究者番号: 60360434

(3) 連携研究者

石原 秀至 (ISHIHARA, Shuji)
東京大学・大学院総合文化研究科・助教
研究者番号: 10401217