

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 6 月 4 日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2010～2012

課題番号：22340023

研究課題名（和文）

弾性方程式族の逆問題研究

研究課題名（英文）

Study of Inverse Problems for Family of Elasticity Equations

研究代表者

中村 玄 (NAKAMURA GEN)

北海道大学・一・名誉教授

研究者番号：50118535

研究成果の概要（和文）：生体組織の粘弾性率を非侵襲的に測定する elastography のデータ解析とそれに関連する放物型方程式に対する LSM(linear sampling method)及び異常拡散方程式に対する Carleman 評価について研究し、十分な成果を挙げた。この数年間研究を行ってきた深さ方向に非均質な残留応力を持つ半無限弾性体に対する Rayleigh 波の速度分散公式を完成した。通常の橋やビルの構造物の基本ユニットであるコンクリート・鉄接合梁のコネクターの損傷同定問題に対する逆解析手法を与えた。

研究成果の概要（英文）：Some studies were done and obtained sufficient results on the data analysis of elastography which measures the visco-elasticity of tissues in a living body non-invasively, and as their related studies, the LSM (linear sampling method) for parabolic equations and Carleman estimate for anomalous diffusion equations. We completed our recent year study on the dispersion formula of the speed of Rayleigh wave for half space depth dependent anisotropic elastic media with residual stress. We gave an inversion scheme for detecting damage of connectors of steel-concrete composite beam.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010 年度	4,300,000	1,290,000	5,590,000
2011 年度	3,500,000	1,050,000	4,550,000
2012 年度	3,600,000	1,080,000	4,680,000
年度			
年度			
総計	11,400,000	3,420,000	14,820,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学解析

キーワード：応用解析

## 1. 研究開始当初の背景

本研究では、固体の弾性変形を記述する弾性方程式系の逆問題（建設・材料・医療分野に

おける超音波検査、土木・環境・資源・地球物理分野における弾性波探査など）、そして固体の力学特性として粘性を考慮する必要

がある生体やプラスチックなどの粘弾性体の方程式系の逆問題研究とそのために必要なこれらの方程式系の解の構造解析を、研究目的とした。これらの方程式系は複雑であるばかりでなく、特殊な形をしているために研究が難しく、本研究目的に関するこれまでの数学研究は立ち遅れていた。例えば残留応力を持つ等方弾性方程式系は、通常の弾性方程式系の対称性を満たさない、非等方な方程式系である。また、生体組織の変形を記述する等方粘弾性方程式系のポアソン比は  $1/2$  に近く、近似的に非圧縮である。そして脳が生体組織を記述する粘弾性方程式系では分数階時間微分が現れるなど、これまでの方程式系に見られない新しい特徴を持つ。従ってこうした難しさを持つこれらの方程式系の解の構造解析を踏まえた本研究の逆問題解析は、極めて先駆的な研究を意図していたと言える。

## 2. 研究の目的

超音波検査や弾性波探査などの**非破壊検査**の逆問題は、何れも固体の弾性変形を記述する**弾性方程式系**の逆問題としてモデル化され、**計測データ**（例えばある場所での弾性体の変位情報、即ち弾性方程式系の**解の情報**）から固体中の**未知境界**（例えば弾性体中に埋め込まれている未知剛体や空洞の境界、即ち弾性方程式系の解やその境界応力がゼロとなる未知境界）や**未知力学特性**（即ち弾性方程式系の未知係数）を**同定**（決定と同義）する問題である。生体やプラスチックなど固体の力学特性に粘性を考慮した場合には、弾性方程式よりも複雑な**粘弾性方程式系**をモデル方程式系として考える必要がある。本研究の目的は、これらの方程式系を**弾性方程式族**と呼び、それを用いて記述される逆問題について研究することである。即ち、弾性

方程式族の境界値問題や初期値境界値問題の解の情報を用いて、弾性方程式系の未知係数やこれらの問題を考察している空間領域や時空間領域における未知境界の同定に関する応用上重要な未解決問題について、**順解析**と**逆解析**を行う。順解析としては弾性方程式族の**解の構造の研究**、逆解析としては順解析結果を踏まえた**逆問題の解**（未知境界や未知力学特性）の一意性（逆問題の解が一意決定性）、安定性（逆問題の解が計測データに関する連続的依存性）、構成法（**再構成法**と呼ばれる）の研究を行うことである。

## 3. 研究の方法

研究目的の具体的な実現として、次の四つ(1)非定常粘弾性方程式系の逆問題研究、(2)定常粘弾性方程式系の逆問題研究、(3)残留応力を持つ等方弾性方程式系の逆問題研究、(4)鉄・コンクリート接合梁の損傷同定逆問題に大別して、以下の研究方針に従って研究した。

(1)非定常粘弾性方程式系の逆問題研究：

解の構造が非定常粘弾性方程式系と共通点が多い（非均質非等方）熱方程式に対して、その境界値逆問題（例えば熱伝導体中の未知空洞や未知介在物などの形状同定問題）について、定常波の散乱の逆問題の再構成法としてもっとも有名な **linear sampling 法**(LSM法と略)を確立し、粘弾性方程式系の境界値逆問題の再構成法に対する足がかりとする。これはプラスチック等の高分子材料に対する非破壊検査法の開発に備える為である。また、分数階の時間微分を有する粘弾性方程式系の逆問題解析にとって極めて重要な解の一意接続定理を導出の準備として、異常拡散方程式に対して一意接続定理を示す。この方程式は、通常の拡散方程式の時間微分が分数階時間微分に置き換えたものである。

(2)定常粘弾性方程式系の逆問題研究：

定常粘弾性方程式系は、生体組織の粘弾性係

数を非侵襲的に計測する MRE (magnetic resonance elastography の略)のモデル方程式として用いられ、MRE のハードウェアにより励起・計測される粘弾性波動よりこのモデル方程式の粘弾性係数同定逆問題の解を求めるソフトウェア開発に重要である。以下この逆問題を MRE 逆問題と呼ぶ。この逆問題は、内部計測データが与えられているので、一見優しい問題のように見えるが、決してそうではない。その一つの理由は、この方程式系は係数が複素係数の楕円型方程式系のため、その解の構造を既存の方法で調べることは難しいことにある。そこで粘弾性係数が連続微分可能で区分的に解析的である場合に、この MRE 逆問題の解の安定性を、semi-analytic set に対する L-regular stratification theory を用いた解の危点集合の解析を行うことにより示す。

実は生体組織の変形を記述する適切なモデル方程式とは何かというのは極めて難しい問題である。言い換えると MRE 逆問題においては、モデル方程式のモデリングエラーは大きいとみる必要がある。そこでモデル方程式に依らずに生体組織の粘弾性の相対的な指標を与える FBI 変換 (Fotlrier-Bros-Iagolnitzer 変換の略で連続ウェーブレット変換ともいう) を用いた新しい方法を与える。

(3) 残留応力を持つ等方弾性方程式系の逆問題研究 :

弾性方程式の非等方性と非均質性の影響が重要となる Rayleigh 波の速度の分散公式について研究した。これは深さ方向にのみ依存する残留応力を持つ半無限等方弾性体の自由境界 (応力がゼロの境界) に振幅が集中して伝搬する Rayleigh 波の速度が、残留応力により生じる非等方性と非均質性の影響で、波の波数変化によりどのように変化するかに関する高波数域での変分公式である。これ

は残留応力の様な相対的に微小な物理量を非破壊的に検査する上で極めて重要な公式である。この公式の導出は、研究代表者が用いてきた高波数楕円型領域における非等方弾性方程式の漸近分解公式の手法をより精密化して適用することにより行う。

(4) 鉄・コンクリート接合梁の損傷同定逆問題研究 :

この研究では通常橋梁構造体の基本ユニットである鉄・コンクリート接合梁の損傷同定逆問題の解法のアルゴリズムを与える。このアルゴリズムで用いる計測データは、インパルスハンマー試験で得られる接合梁の1番目から3番目までの固有振動数と対応する接合梁の鉛直方向固有関数成分である。鉄梁とコンクリート梁を接合するコネクタの剛性率の低減が、接合梁の損傷度を表すと考える。そこで先ずこの剛性率を摂動したときの固有値と固有関数の摂動公式を求める。次に計測データを与えるような剛性率を最小二乗法で求める所で、この摂動公式に基づく共役勾配法を適用する。

#### 4. 研究成果

前項に挙げた四つの小項目(1)~(4)別に研究成果を述べる。

(1) 伝熱体中の未知空洞と未知介在物の同定に関して、熱方程式に対する LSM 法を確立した。未知介在物同定に関しては、所謂 interior transmission problem (ITP と略) が現れるが、熱方程式の場合は定常熱方程式や Helmholtz 方程式の場合と異なり、この problem は適切であることが示せ、熱方程式の LSM は、ITP の適切性を仮定することなく、極めてすっきりとして形で得られた。この LSM 法と既存の dynamical probe method を組み合わせることにより、数学的に厳密なサンプリング型の未知境界同定スキームが、任意微小時間内の2回の計測で実現可能であることも分かった。

1/2 階の時間微分を持つ異常拡散方程式の解に対する Carleman estimate を、適当に de-singularize した semi-elliptic 微分作用素に対する Calderon 型 Carleman estimate 導く事により示した。

(2) MRE の所謂スカラーモデル方程式に対して、粘弾性係数が連続微分可能かつ区分的に

解析的、そしてある種の条件を満たすことを仮定する。このとき、この方程式の解を計測データとして、粘弾性係数を同定する逆問題について局所 Holder 連続安定性を示した。なおこのある種の条件は、粘性係数が既知ならば自動的に満たされる。さらに一意性に限れば大域的である。この結果の副産物として、弾性係数同定に関する不完全 Newton 型再構成スキームの収束性も従うことが分かった。モデル方程式に依らない FBI 変換を用いた粘弾性係数の相対指標に関しては、次の結果を得た。即ち、生体組織内を伝搬する粘弾性波は、局所的には複素線形位相関数を持つ指数関数（単純波と略）の有限線形結合であるとして、もっとも大きな振幅を持つ単純波の位相関数を、FBI 変換を用いて求めるアルゴリズムを確立した。この位相関数の実部と虚部は、それぞれ粘弾性波の局所波動ベクトルと局所的な波の減衰方向を示すベクトルを与える。

このアルゴリズムは MRE データに関してロバストであり、モデル方程式を用いたアルゴリズムによる弾性係数の同定結果と十分近い結果を得た。このアルゴリズムは、MRE データのノイズ低減化やフィルタリング等の前処理としても有効であることも確認した。

(3) ここ数年来研究を行って来た深さ方向にのみ依存する残留応力を持つ半無限等方弾性体に対する Rayleigh 波の速度の分散公式を完成した。分散公式の初項は等方弾性体の速度を表し、第 2 項以降は残留応力テンソルの境界値及びその微分値に関係し、項番号とその項に含まれる残留応力テンソルの微分の最大階数は等しい。

(4) インパルスハンマー試験により得られる少数個のスペクトルデータを用いた鉄・コンクリート接合梁の損傷同定アルゴリズムの数学的な枠組みを確立し、その有効性を数値データ及び実験データに対して検証した。その結果、このアルゴリズムは損傷が進んだ箇所同定には有効であることが分かった。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 11 件)

- ① Gen Nakamura and Sasayama Satoshi, Inverse boundary value problem for the heat equation with discontinuous coefficients, J. Inverse Ill-Posed Probl., accepted (査読有) 印刷中
- ② Chi-Sing Man, Gen Nakamura,

Kazumi Tanuma and Shengzhang Wang, Dispersion of Rayleigh Waves in Vertically-Inhomogeneous Prestressed Elastic Media, IMA Journal of Applied Mathematics(2013)pp.1-38, Online publication,

DOI:10.1093/imamat/hxt025 (査読有)

- ③ Kogo Yoshikawa and Gen Nakamura, Model Independent MRE Data Analysis, Computational and Mathematical Methods in Medicine, vol. 2013 (2013), Online publication, <http://dx.doi.org/10.1155/2013/912920>

(査読有)

- ④ Ching-Lung Lin and Gen Nakamura, Unique continuation property for the anomalous diffusion and its application, Journal of Differential Equations, Online publication,

DOI: 10.1016/j.jde.2013.01.039 (査読有)

- ⑤ Jishan Fan, Kyoungsun Kim, Sei Nagayasu and Gen Nakamura, A gradient estimate for solutions to parabolic equations with discontinuous coefficients, Electron. J. Diff. Equ., Vol. 2013 (2013)pp. 1-24 (査読有)

- ⑥ Horst Heck, Gen Nakamura and Haibing Wang, Linear sampling method for identifying cavities in a heat conductor. Inverse Problems, 28 (2012), No. 7, 075014 (査読有)

- ⑦ Kyoungsun Kim, Gen Nakamura and Mourad Sini, The Green function of the interior transmission problem and its applications, Inverse Problems and Imaging, 6(2012)pp.487-521 (査読有)

- ⑧ Shuichi Jimbo, Antonino Morassi, Gen Nakamura and Kenji Shiota, A non-destructive method for damage Detection in steel-concrete Structures based on finite eigendata, Inverse Problems in Science and Engineering. 20 (2012)pp. 233—270 (査読有)
- ⑨ Yu, Jiang, Hiroshi Fujiwara and Gen Nakamura, Approximate steady state models for magnetic resonance elastography, SIAM Journal on Applied Mathematics, 71(2011)pp. 1965-1989 (査読有)
- ⑩ Victor Isakov, Kyoungsun Kim and Gen Nakamura, Reconstruction of an unknown inclusion by thermography. Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) 9 (2010)pp. 725–758 (査読有)
- ⑪ Ching-Lung Lin and Gen Nakamura, Unique continuation property for a coupled second-fourth order dynamical system and its application. SIAM J. Math. Anal. 42(2010)pp. 2318–2336 (査読有)

[学会発表] (計 17 件)

- ① Gen Nakamura, Linear sampling method for heat conductors, Inverse Problems of PDEs and Related Topics, Nov. 19-21, 2012, RIMS, Kyoto Univ.,
- ② Gen Nakamura, Reconstruction scheme for diffusion equations, MSJ-KMS Joint Meeting, September 17, 2012, Kyushu Univ.,
- ③ Gen Nakamura, Reconstruction schemes for diffusion equations, Inverse and Ill-posed Problems of Mathematical Physics, Dedicated to the 80 th anniversary of the birthday

of Academician Mikhail Mikhailovich Lavrent'ev, August 5-12, 2012, Novosibirsk.

- ④ Gen Nakamura, Linear sampling method for 2nd order parabolic equations, Inverse Problems and PDE Control, July 30-August 3, 2012, Sichuan Univ..
- ⑤ Gen Nakamura, Magnetic resonance elastography, data analysis, Waves and imaging in complex media, June 7-15, 2012, FORTH, Crete
- ⑥ Gen Nakamura, Stability estimate of stiffness from MRE data, Semi-classical and multiscale aspects of wave propagation, May 28-June 1, 2012, acmac, Crete.
- ⑦ 中村 玄, MRE データの逆解析手法、第 61 回理論応用力学講演会, 2012 年 3 月 9 日, 東京大学生産技術研究所
- ⑧ Gen Nakamura, Reconstruction schemes for diffusion equations, Finnish-Japanese-Korean workshop on inverse problems, December 13-16, 2011, Univ. of Helsinki.
- ⑨ Gen Nakamura, Reconstruction scheme for active thermography, September 20, 2011, Newton Institute, Cambridge.
- ⑩ Gen Nakamura, Data analysis for micro-MRE measured data Bio-mechanical Imaging Mini-symposium in Applied Inverse Problems Conference, May 23-27, 2011, Univ. of Texas A&M.
- ⑪ Gen Nakamura, Lectures on several reconstruction schemes for inverse

problem, Madrid Special Trimester on Inverse Problems: Theoretical and Numerical Aspects of Inverse Problems and Scattering Theory, May 9 to 12, 2011, ICMAT, Madrid.

- ⑫ Gen Nakamura, Active thermography and dynamical probe method, Mini-Workshop: Nonlinear Least Squares in Shape Identification, January 18, 2011, Oberwolfach, Germany.
- ⑬ Gen Nakamura, Dynamical probe method for anisotropic heat conductors, ICIP 2010, December 15, 2010, Hong Kong City Univ., Hong Kong, China
- ⑭ Gen Nakamura, Gradient estimate of solutions of parabolic operator with discontinuous coefficients, Inverse Problems Seminar, September 29, 2010, MSRI, Berkeley, USA
- ⑮ Gen Nakamura, Time resolved diffusive optical tomography, Workshop on Optical Tomography, Workshop on Optical Tomography, May 17-21, 2010, BIRS, Banff, Canada
- ⑯ Gen Nakamura, Dynamical probe method for anisotropic heat conductors, 19th Workshop on Differential Equations and Its Applications, January 15, 2011, Cheng-Kung Univ., Tainan, Taiwan
- ⑰ Gen Nakamura, Inverse spectral problem for identifying damage in steel-concrete composite beams, 日本土木学会、第13回応用力学シンポジウム、2010年8月31日、北海道大学

[産業財産権]

○出願状況 (1件)

名称: MRE 用の加振装置、加振システム、および加振方法  
発明者: 但野茂、梶原逸郎、藤崎和弘、高尾聖心、中村玄、Jiang Yu、菅幹生  
権利者: 北海道大学、千葉大学  
種類: A61B 5/055  
番号: WO 2012/026543 A1  
出願年月日: 2011年8月25日  
国内外の別: 国外

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

中村 玄 (NAKAMURA GEN)  
北海道大学・一・名誉教授  
研究者番号: 50118535

### (2) 研究分担者

神保 秀一 (JIMBO SHUICHI)  
北海道大学・大学院理学研究院・教授  
研究者番号: 80201565

本多 尚文 (HONDA NAOFUMI)  
北海道大学・大学院理学研究院・准教授  
研究者番号: 00238817

川下 美潮 (KAWSHITA MISIO)  
広島大学・大学院・理学研究科・教授  
研究者番号: 80214633

田沼 一実 (TANUMA KAZUMI)  
群馬大学・大学院・工学研究科・准教授  
研究者番号: 60217156

渡邊 道之 (WATANABE MICHUYUKI)  
新潟大学・人文社会・教育学系・准教授  
研究者番号: 90374181

代田 健二 (SHIROTA KENJI)  
愛知県立大学・情報学部・准教授  
研究者番号: 90302322

### (3) 連携研究者

なし