

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 11 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2010～2013

課題番号：22340024

研究課題名(和文)マルコフ過程の漸近挙動に関する関数解析的研究

研究課題名(英文)Functional analytic study on asymptotic properties of Markov processes

研究代表者

竹田 雅好(Takeda, Masayoshi)

東北大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：30179650

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 10,400,000円、(間接経費) 3,120,000円

研究成果の概要(和文)：ディリクレ形式の理論は、対称マルコフ過程を解析するための重要な道具として発展してきた。ディリクレ形式の理論はL-2理論であり、そのため特異なマルコフ過程を扱うことができる。しかし、マルコフ過程論はある意味でL-1理論である。そのギャップを埋めるために、マルコフ過程に強フェラー性や緊密性を仮定することで、半群の増大度に対するL-p独立性を示した。時間変更で生成される対称マルコフ過程に対してL-p独立性を応用することで、加法汎関数の指数可積分性や大偏差原理を証明した。熱核評価がポテンシャル項の摂動で保たれるための必要十分条件も与えた。

研究成果の概要(英文)：The theory of Dirichlet forms has been developed as a useful tool for studying symmetric Markov processes. The theory of Dirichlet forms is an L-2-theory, and which is a reason why the theory is suitable for treating singular Markov processes. However, the theory of Markov processes is, in a sense, an L-1-theory. To bridge this gap, we prove the L-p-independence of growth bounds of Markov semi-groups under the conditions for the Markov processes to be strong Feller and to be tight. By applying the L-p-independence to time changed Markov processes, we show the exponential integrability of positive continuous additive functionals (PCAF's in short) and the large deviation principle of PCAF's. Moreover, we give a necessary and sufficient condition for heat kernel estimates being stable by perturbation of potential terms.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析

キーワード：ディリクレ形式 対称マルコフ過程 大偏差原理 加法汎関数 スペクトル下限

1. 研究開始当初の背景

マルコフ過程の一つの構成方法としてディリクレ形式による福島の方法がある。代表者はディリクレ形式から生成されるマルコフ過程の性質を、ディリクレ形式を用いてポテンシャル論的に研究してきた。ディリクレ形式論は L^2 理論であり、特異なマルコフの構成に有用である反面、そのマルコフ過程は容量ゼロの除外集合を除いて一意に定まる。そのため、マルコフ過程や加法汎関数の性質をすべての出発点に対して調べるには、マルコフ過程にさらなる仮定、例えば強フェラー性が必要になる。そこで、強フェラー性の仮定の下で、大偏差原理、加法汎関数、熱核の安定性を導くために、さらにどのような仮定を付加すればよいか考察したかった。その手がかりとして、マルコフ半群の増大度の L^p 独立性が成立するための条件を調べてきた。そのことが、 L^2 理論であるディリクレ形式論とマルコフ過程論をつなぐ鍵となると考えたためである。

その応用として、処罰問題 (penalization problem) や準定常分布の存在など、対称マルコフ過程の長時間挙動に関する結果を導きたいと考えていた。実際、 L^p 独立性を用いることで、 L^2 スペクトルの下限の言葉でもって、漸近挙動の様相を分類できると予想していた。

2. 研究の目的

(1) 乗法汎関数の重み付き対称マルコフ過程に対する Donsker-Varadhan 型大偏差原理を確立する。2. ディリクレ形式論は L^2 理論であり、マルコフ過程論は確率測度を扱うための L^1 理論と考えられる。そのギャップを埋めるために、マルコフ半群、さらに一般化してファイマン-カツ半群を L^p 空間で考えたとき、そのスペクトル半径が p に依らないための必要十分条件を求める。証明した L^p -独立性を応用することで、加法汎関数に関する諸性質 (指数可積分性や長時間挙動) や熱核の安定性 (ポテンシャルの摂動により熱核評価が保たれること) の必要十分条件を与える。時間変更過程に対して L^p -独立性を応用することで、これらの必要十分条件を時間変更過程の最小固有値の言葉で統一的に与えることを目指す。

(2) 双対もマルコフになるような非対称拡散過程に対して拡張された Lyons-Zheng 分解を応用し、特異な非対称拡散過程に対して保存性判定条件を得る。

(3) 分数冪ラプラシアンを主要部にもつ Schroedinger 作用素の臨界性理論を構築する。時間変更過程の最小固有値の言葉で、劣臨界、臨界、優臨界の場合分けを行い、劣 (優) 調和関数の性質を調べる。この結果を、一般の対称ディリクレ形式から定義される自己共役作用素を主要部にもつ Schroedinger 作用素の臨界性理論を構築の手がかりとする。

3. 研究の方法

Donsker-Varadhan 型大偏差原理はマルコフ過程の性質であるにもかかわらず、その性質を制御するレート関数はディリクレ形式で与えられる。そこで、 L^p -独立性を示すためにはまず Donsker-Varadhan 型大偏差原理に対する理解を深め、その成立するための条件を検討する。応用したいマルコフ過程は時間変更で構成されるものなので、爆発や内部での消滅を持つことが考えられる。そこで、有限な生存時間を許す対称マルコフ過程の場合に、Donsker-Varadhan 型大偏差原理を拡張することから始めた。そして、 L^p -独立性については、連携研究者・田原と研究連絡を取り、マルコフ半群のみならずファイマン-カツ半群に対して考察した。桑江は、これらの事実をエネルギー零の加法汎関数を含むより広い半群への拡張を目指した。 L^p 独立性は加法汎関数の指数モーメント母関数の存在を示すためにも応用できることが分かり、連携研究者・土田と加法汎関数の大偏差原理を考察した。塩沢は、ジャンプを含むマルコフ過程の、竹田は非対称な場合の拡散過程について保存性を、研究連絡を取りながら進めた。Lyons-Zheng 分解を拡張し、確率的な接近の可能性を探った。

これらのテーマについて議論するために、連携研究者の相互訪問を年1,2回のペースで行った。特に、最終年度である2013年11月に、代表者・竹田の所属する東北大学で研究集会「マルコフ過程とその周辺」を主催し、講演・討論をとおして、関連する最新の成果について議論した。

4. 研究成果

(1) 時間変更過程に対して L^p -独立性を用いることで、ファイマン-カツ汎関数の可積分性 (gaugeability) や Schroedinger 作用素の熱核がガウス型評価を持つための必要十分条件などを、時間変更過程の L^2 -スペクトラムの下限の言葉で与えることができた。その副産物として、一様な Donsker-Varadhan 型大偏差原理や対称マルコフ過程における基底 (ground state) の存在についても新たな判定条件を得た。 L^p -独立性を含めてこれらの結果は、飛躍、エネルギー零などを含む特異な加法汎関数で摂動される場合にも拡張された。

(2) 非対称な拡散過程について、Lyons-Zheng 分解を用いて、保存性に関する十分条件を得た。従来の方法では扱えなかった拡散係数が滑らかでない場合も扱っており、新しい方法と結果を与えている。特別な飛躍型対称マルコフ過程に対しても、保存性より強く、無限遠点への接近の速さを示す escape rate について、上からの評価を得た。飛躍を含む場合の保存性については限られた結果しか存在せず、また escape rate については、拡散過程の場合や飛躍マルコフ過程も安定過程に限られており、新たなテーマの重要な第一歩

となりえる。

(3) 分数冪ラプラスアンを主要部にもつ Schroedinger 作用素の臨界性について考察した。分数冪ラプラスアンから生成されるマルコフ過程は飛躍型マルコフ過程の典型である対称安定過程であるが、それが再帰的であるか過渡的であるかで正值調和関数の様子が著しく変わることを示した。過渡的な場合には、劣臨界的な Schroedinger 作用素に対して有界な正值調和関数が存在する。しかし再帰的な場合には、臨界的な Schroedinger 作用素に対して有界な正值調和関数が存在し、劣臨界的な Schroedinger 作用素に対しては有界な正值調和関数は存在しないことが示せた。古典的な Schroedinger 作用素に対しては、正值調和関数の増大度まで求められ、上のことはその系として示されているが、ここでは対称安定過程の再帰的・過渡的のみを用いた定性的な証明を与えている。この結果は、一般の対称ディリクレ形式から定義される自己共役作用素を主要部にもつ Schroedinger 作用素の臨界性理論を構築の手がかりとなっている。実際、ポテンシャルにある付帯条件を付けることで、スペクトル下限の言葉で、劣臨界性・臨界性・優臨界性が判定できることが示せた。

(4) Donsker-Varadhan の I-function とディリクレ形式の対応関係を、有限な生存時間を持つ対称マルコフ過程に拡張し、基底 (ground state) の存在を証明する新たな方法を発見した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 15 件)

- ① 竹田雅好, A variational formula for Dirichlet forms and existence of ground states, J. Funct. Anal. 査読有 266, (2014), 660-675. DOI: 10.1016/j.jfa.2013.10.024
- ② 塩沢裕一, 上村 捻大, Explosion of jump-type symmetric Dirichlet form on \mathbb{R}^d , J. Theoretical Probability, 査読有 27 (2012) 1-29 DOI: 10.1007/s10959-012-0424-5
- ③ X. Huang, 塩沢裕一, Upper escape rate of Markov chains on weighted graphs, Stochastic Process. Appl. 査読有 124 (2014), 317-347. DOI: 10.1016/j.spa.2013.08.004
- ④ 竹田雅好, A tightness property of a symmetric Markov process and the uniform large deviation principle, Proc. Amer. Math. Soc. 査読有 141, (2013), 4371-4383. DOI: 10.1090/S0002-9939-2013-11696-5
- ⑤ 竹田雅好, 田原 喜宏, A large deviation principle for symmetric Markov processes normalized by Feynman-Kac functionals, Osaka J. Math. 査読有 50, (2013), 287-307.

projecteuclid.org/Euclid.ojm/1371833486

- ⑥ 竹田雅好, G. Trutnau, Conservativeness of non-symmetric diffusion processes generated by perturbed divergence forms, Forum Math. 査読有 24 (2012), 419-444. DOI: 10.1515/FORM.2011.111
 - ⑦ Z.-Q. Chen, 桑江一洋, On subharmonicity for symmetric Markov processes, J. Math. Soc. Japan, 査読有 64 (2012), 1181-1209 DOI: 10.2969/jmsj/06441181
 - ⑧ 桑江一洋, On Calabi's strong maximum principle via local semi-Dirichlet forms, Potential Anal. 査読有 37 (2012), 387-413. DOI: 10.1007/s11118-011-9266-5
 - ⑨ 竹田雅好, A large deviation principle for symmetric Markov processes with Feynman-Kac functional, J. Theoret. Probab. 査読有 24 (2011), 1097-1129. DOI: 10.1007/s10959-010-0324-5
 - ⑩ 桑江一洋, Invariant sets and ergodic decomposition of local semi-Dirichlet forms, Forum Math. 査読有 23 (2011), 1259-1279. DOI: 10.1515/FORM.2011.046
 - ⑪ 桑江一洋, 塩谷 隆, A topological splitting theorem for weighted Alexandrov spaces, Tohoku Math. J. 査読有 63 (2011), 59-76. DOI: 10.2748/tmj/1303219936
 - ⑫ 竹田雅好, 土田兼治, large deviations for discontinuous additive functionals of symmetric stable processes, Math. Nachr. 査読有 284 (2011), 1148-1171. DOI: 10.1002/mana.200810843
 - ⑬ 竹田雅好, A formula on scattering length of positive smooth measures, Proc. Amer. Math. Soc. 査読有 138, (2010), 1491-1494. DOI: 10.1090/S0002-9939-09-10172-7
 - ⑭ 塩沢裕一, 上村 捻大, Stability of the Feller property for non-local operators under bounded perturbations, Glas. Mat. Ser. 査読有 45, (2010), 155-172. DOI: 10.3336/gm.45.1.12
 - ⑮ 田原 喜宏, L^p -independence of spectral bounds of Schroedinger-type operators with non-local potential, J. Math. Soc. Japan 査読有 62, (2010), 767-788. DOI: 10.2969/jmsj/06230767
- [学会発表] (計 10 件)
- ① 土田兼治, 調和関数と大偏差原理, 科研費シンポジウム「マルコフ過程とその周辺」2013年11月15日、仙台
 - ② 田原喜宏, A Large Deviation Principle for Symmetric Markov Processes Normalized by Feynman-Kac Functionals, 科研費シンポジウム「マルコフ過程とその周辺」2013年11月14日、仙台
 - ③ 桑江一洋, Another analytic

characterization of gaugeability for generalized Feynman-Kac Functionals, 科研費シンポジウム「マルコフ過程とその周辺」2013年11月14日、仙台

④ 桑江一洋, Resolvent flows for convex functionals and p -harmonic maps, German-Japanese Open Meeting on Stochastic Analysis, 2013年9月11日、ドイツ、ライプチヒ大学

⑤ 塩沢裕一, Upper escape rate of Markov chains on weighted graphs, German-Japanese Open Meeting on Stochastic Analysis, 2013年9月10日、ドイツ、ライプチヒ大学

⑥ 竹田雅好, A variational formula for Dirichlet forms and Existence of Ground states, German-Japanese Open Meeting on Stochastic Analysis, 2013年9月9日、ドイツ、ライプチヒ大学

⑦ 竹田雅好, A variational formula for Dirichlet forms and existence of ground states, 研究集会「マルコフ過程と確率解析」、2013年1月13日、京都

⑧ 竹田雅好, Feynman-Kac penalizations of symmetric stable processes, the Banff workshop "Foundations of Stochastic Analysis", 2011年9月20日、カナダ、バンフ

⑨ 竹田雅好, A Tightness property of symmetric Markov processes, 5th International Conference on Stochastic Analysis and its Applications, 2011年9月5日、ドイツ、ボン大学

⑩ 竹田雅好, 対称マルコフ過程の加法汎関数に関する話題, 確率論サマースクール、2011年8月8日-10日、松本

[図書] (計 1 件)

福島正俊、大島洋一、竹田雅好、Dirichlet forms and symmetric Markov processes, Second revised and extended edition, de Gruyter Studies in Mathematics 19, Walter de Gruyter (2011)、1-489 ページ.

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況 (計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：

種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

[その他]
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

竹田 雅好 (TAKEDA, MASAYOSHI)
東北大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：30179650

(2) 研究分担者

(3) 連携研究者

桑江 一洋 (KUWAE, KAZUHIRO)
熊本大学・大学院自然科学研究科・教授
研究者番号：80243814

塩沢 裕一 (SHIOZAWA, YUICHI)
岡山大学・大学院自然科学研究科・准教授
研究者番号：60454518

土田 兼治 (TSUCHIDA, KAMEHARU)
防衛大学校・数学教育室・講師
研究者番号：80466523

田原 喜宏 (TAWARA, YOSHIHIRO)
長岡工業高等専門学校・一般教育科・准教授
研究者番号：00567901