

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 27 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2010～2014

課題番号：22340025

研究課題名(和文)幾何学的函数論の多面的研究

研究課題名(英文)Various aspects on the study of Geometric Function Theory

研究代表者

須川 敏幸(SUGAWA, Toshiyuki)

東北大学・情報科学研究科・教授

研究者番号：30235858

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 13,300,000円

研究成果の概要(和文)：幾何学的函数論における典型的な問題は幾何的に記述される平面内の(単連結)領域と、単位円板からその領域への等角写像の解析的性質との関係を調べることです。ビーベルバッハは  $a_0=0$ ,  $a_1=1$  と正規化された単位円板上の解析函数  $f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\dots$  がある領域への等角写像ならば  $|a_n| \leq n$  であることを予想しました。それは70年後にドブランジュにより示されました。本研究ではたとえば、係数  $a_n$  の2倍が整数であるような等角写像は全部で21個に限ることを示しました。 $a_n$  がすべて整数の場合は9個に限ることは知られていたもので、12個増えることとなります。

研究成果の概要(英文)：Geometric Function Theory deals with problems finding relations between geometrically described (simply-connected) domains in the plane and analytic properties of conformal mappings onto them. Bieberbach conjectured that, for a conformal mapping  $f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\dots$  normalized by  $a_0=0$ ,  $a_1=1$ , the modulus  $|a_n|$  of  $a_n$  is not greater than  $n$ . This conjecture was finally proved by de Branges in his 1985 paper. In the present research project, for example, we showed that the set of conformal mappings as above with half-integral coefficients consists of exactly 21 functions. The similar set for the integral coefficients was previously known to consist of 9 functions.

研究分野：複素解析学

キーワード：等角写像 単葉函数 双曲計量 錐特異性 シュワルツ微分 極値問題 擬等角写像

### 1. 研究開始当初の背景

極値的長さや双曲計量といった等角不変量は幾何学的函数論において現在では必要不可欠な道具となっている。不変性をうまく用いることによって一般の状況を特別な状況に帰着し、具体的な計算や評価に持ち込むことができるからである。したがって、新しい等角不変量が見つければ、それによって問題が解決される可能性もある。新しい等角不変量を見つけること、さらに等角不変量の新たな性質や評価を得ることは幾何学的函数論の発展にとって重要な課題である。

### 2. 研究の目的

本研究では、主に幾何学的手法を用いて等角不変量など種々の解析的・幾何的な量について精密な評価を行うなど基礎的研究を行い、それを足がかりとして解析函数や擬等角写像など重要な函数の性質を究明する。さらに、それらの知見を様々な未解決問題や、クライン群、複素力学系などに応用して幾何学的函数論の総合的な発展を目指す。

より具体的には、等角不変量をキーワードとして、以下のテーマについて研究分担者と協力しながら研究し、理論を進展させることを目的とする：(1) 高次不変シュワルツ微分の基礎研究とその応用、(2) 双曲的リーマン面の大域解析、(3) 等角写像の定量的研究、(4) 擬等角写像の研究、(5) 多項式の幾何学。

### 3. 研究の方法

東北大学においては、東北複素解析セミナーを毎月行うなど、定例のセミナーを行うことによって研究者や学生の間で知識や情報を共有する。各分担者においても、同様に各々でセミナーを行い、適宜講演者を外部から招いて情報交換や知識の授受を行う。また、函数論サマーセミナーや「等角写像論・値分布論」研究集会など、函数論分科会が毎年開催する研究集会を援助することによって、この分野の推進を図る。また、国際研究集会に積極的に参加することにより、国際的に活躍する研究者と交流をはかり情報交換を行う。さらに、2011年には有限無限次元複素解析国際会議を主催し、2013年には独自に国際研究集会を開催し、国内外の研究者を招いて研究交流を図る。

### 4. 研究成果

研究期間内で多くの成果が得られたが、ここでは研究代表者が関わったものを中心として代表的なものを挙げておく。

- (1) 単位円板上の退化ベルトラミ方程式の解の境界での連続性の精密な評価を半円環のモジュラスの評価により与えた。半円

環を用いる手法は汎用性があり、今後別のクラスの写像に対する同様の研究にも応用が可能であると期待される。

- (2) ベキ変形の研究。単葉函数に対してそのベキ変形がやはり単葉になるための条件や、そのような指数の集合の構造を調べた。たとえば、そのような指数の集合の内部の各成分は単連結領域となっていることがわかり、それにより単葉函数の正則族が得られるため、タイヒミュラー空間論などへの応用が期待される。また、証明の過程において、 $zf'(z)/f(z)$ の絶対値による新たな単葉性判定法を導くことができ、別の論文において John 定数の類似の定数を定義してその具体的評価も行った。
- (3) 高階シュワルツ微分の研究。定義領域が単位円板の場合に一般階のシュワルツ微分のノルム評価を得たほか、多重点シュワルツ補題や、グルンスキー係数、ベキ行列との関係についても研究を行った。その他、高階シュワルツ微分の間には種々の関係式が成り立つことを観察し、それらの意味づけや応用を考察しているところであり、引き続き研究を行っている。
- (4) 近接凸函数 (Close-to-convex function)  $f(z)$  について  $zf'(z)/f(z)$  や  $z/f(z)$  の変動領域を詳しく研究し、特にすべての  $z$  を動かして得られる全変動領域を完全に決定した。また、さらにそれを応用してある種の極値問題を解くことにも成功した。
- (5) 錐特異性を持つ双曲計量の存在と一意性について研究を行ったが、まだ完全に一般的な形での証明には成功していない。部分的な成果として、2つの錐特異点間の双曲距離の最良な下限を与えることに成功した。
- (6) 平面領域の境界の一樣完全性は双曲計量の密度函数と境界までの距離函数の積が正の定数で下から押さえられることとして特徴付けられることが知られているが、平面領域が無限遠点を含む場合には、もはやこの特徴付けは機能しなくなる。そこで、そのような場合でも、球面幾何をうまく用いることによって、類似の特徴付けを得ることができた。
- (7) リーマン球面から3点以上の点を除いて得られるリーマン面の双曲距離と同値距離を具体的に構成することに成功した。この距離は、点の配置から定まるある種の量のみ依存する定数を用いて双曲距離と評価可能である。そのような量はこれまでに知られておらず、またメビウス変換によって不変な量であり、今後のさらなる応用が期待される。現在、論文の執筆準備中である。
- (8) 位数  $n$  の凸函数に関して、Brickman, Hallenbeck, MacGregor, Wilken によつ

て提唱された従属性予想を解決した。また、その応用としてある種の極値問題を解決した。

- (9) Bieberbach-Gronwall の面積不等式を擬等角拡張を持つ単葉函数族に精密化した Lehto の結果と、極の位置を一般化した Chichra の結果を合わせて、より一般化された結果を得た。特に等号が成立するのは単葉函数がリーマン球面全体にある種の調和擬等角拡張を持つ場合に限ることであるのが興味深い。
- (10) Friedman は 1946 年にすべての係数が整数であるような単位円板上の正規化された単葉函数は 9 つの特別な函数に限ることを見出した。今回、整数という条件を半整数という条件に変えても、12 種類増えるだけですむことを証明した。

また、研究の方法で述べたように、実際に以下のように国際研究集会を開催した。2011 年 12 月には第 19 回有限無限次元複素解析国際会議を広島において開催し(元々仙台にて夏に予定していたが東日本大震災の影響で、冬に延期となり場所も広島に変更となった)、2013 年 9 月には仙台において国際ワークショップ “Geometric Function Theory and Applications in Sendai” を開催し、国内外の専門家が集まって研究成果を発表し、交流する機会を持った。2011 年の集会の会議録は東北大学出版会から報告集の形で 2013 年に出版された。2013 年の集会についても東北大学・情報科学研究科のジャーナルから特集号として出版すべく、現在編集作業を進めているところである。それぞれの研究集会のウェブサイトは下記の通りである。

<http://19fi.cajpn.org/>

<http://www.math.is.tohoku.ac.jp/~sugawa/GFTAS/>

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 18 件)

以下、すべて査読有:

Takao Kato, Toshiyuki Sugawa and Li-Mei Wang  
Variability regions of close-to-convex functions, *Ann. Polon. Math.* 111 (2014), 89-105, doi:10.4064/ap111-1-7

Naoki Hiranuma and Toshiyuki Sugawa  
Univalent functions with half-integral coefficients, *Comput. Methods Func. Theory* 13 (2013), 133-151,  
DOI:10.1007/s40315-013-0009-z

Vladimir Gutlyanskii, Ken-ichi Sakan

and Toshiyuki Sugawa

On  $\mu$ -conformal homeomorphisms and boundary correspondence, *Complex Var. Elliptic Equ.* 58 (2013), 947-962,  
DOI:10.1080/17476933.2011.613116

Yong Chan Kim and Toshiyuki Sugawa  
Univalence criteria and analogs of the John constant, *Bull. Austr. Math. Soc.* 88 (2013), 423-434,  
DOI: 10.1017/S0004972712000962

Toshiyuki Sugawa  
Spherical density of hyperbolic metric and uniform perfectness, *J. Analysis* 21 (2013), 163-171, N/A

Yong Chan Kim and Toshiyuki Sugawa  
On power deformations of univalent functions, *Monatsh. Math.* 167 (2012), 231-240, DOI:10.1007/s00605-011-0344-y

Kyung Hyun Cho, Seong-A Kim and Toshiyuki Sugawa  
On a multi-point Schwarz-Pick lemma, *Comput. Methods Func. Theory* 12 (2012), 483-499, DOI:10.1007/BF03321839

Yong Chan Kim and Toshiyuki Sugawa  
On univalence of the power deformation  $z(f(z)/z)^c$ , *Chinese Ann. Math., Ser. B* 33 (2012), 823-830,  
DOI:10.1007/s11401-012-0750-z

[学会発表](計 17 件)

Toshiyuki Sugawa  
2014.07.29 University of Hong Kong, Hong Kong, Workshop on Complex Geometry, "Hyperbolic metric with conic singularities on Riemann surfaces and its applications"

Toshiyuki Sugawa  
2013.10.24 University of Belgrade, Serbia; Conference on Geometric Function Theory, "An attempt to characterize quasidisks in terms of  $zf'(z)/f(z)$ "

Toshiyuki Sugawa  
2013.06.13 Shantou University, China; CMFT 2013, "Univalence criteria in terms of  $|zf'(z)/f(z)|$ "

須川敏幸  
2012.09.18 九州大学; 日本数学会函数論分科会  
"シュワルツ微分の一般化 ~ 不変化と高階化を目指して ~" (特別講演)

Toshiyuki Sugawa  
2012.08.02 Hanoi University of Science and Technology, Vietnam; 20th ICFIDCAA "Generalizations of the Schwarzian derivative" (plenary talk)

Toshiyuki Sugawa  
2012.07.04 Krakow, Poland; Satellite Thematic Session "Quasiconformal mappings and complex dynamical systems", in 6th European Congress of Mathematics, "Quasiconformal extension of strongly spirallike functions"

Toshiyuki Sugawa  
2012.06.27 Ploiesti, Romania; International Conference on Complex Analysis and Related Topics, "On power deformations of a univalent function"

Toshiyuki Sugawa  
2010.08.15 University of Macau, China; 18th ICFIDCAA, "On boundary regularity of solutions to degenerate Beltrami equations" (main talk)

Toshiyuki Sugawa  
2010.08.11-12 IIT Madras, India; International Workshop on Harmonic and Quasiconformal Mappings (Satellite conference of ICM2010), "Modulus techniques in geometric function theory" (I and II)

〔図書〕(計 1件)

"Topics in Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis", K. Matsuzaki and T. Sugawa (eds), Tohoku University Press, Sendai, Japan, 2013, 208 pages

〔産業財産権〕  
出願状況(計 0件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

取得状況(計 0件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：

出願年月日：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕  
ホームページ等

## 6. 研究組織

(1)研究代表者  
須川敏幸 (SUGAWA, Toshiyuki)  
東北大学・情報科学研究科・教授  
研究者番号：30235858

(2)研究分担者  
志賀啓成 (SHIGA, Hiroshige)  
東京工業大学・理工学研究科・教授  
研究者番号：10154189

柳原宏 (YANAGIHARA, Hiroshi)  
山口大学・理工学研究科・教授  
研究者番号：30200538

佐官謙一 (SAKAN, Ken-ichi)  
大阪市立大学・理学研究科・准教授  
研究者番号：70110856

松崎克彦 (MATSUZAKI, Katsuhiko)  
早稲田大学・教育・総合科学学術院・教授  
研究者番号：80222298

藤川英華 (FUJIKAWA, Ege)  
千葉大学・理学研究科・准教授  
研究者番号：80433788

## (3)連携研究者

水田義弘 (MIZUTA, Yoshihiro)  
広島工業大学・工学部・教授  
研究者番号：00093815

谷口雅彦 (TANIGUCHI, Masahiko)  
奈良女子大学・理学部・教授  
研究者番号：50108974

藤原耕二 (FUJIWARA, Koji)  
京都大学・理学研究科・教授  
研究者番号：60229078

阿部誠 (ABE, Makoto)  
広島大学・理学研究科・教授  
研究者番号：90159442