

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 27 日現在

機関番号：12608

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2010～2014

課題番号：22340027

研究課題名(和文) 双曲 - 楕円型非線形偏微分方程式系の時間大域的構造

研究課題名(英文) Large time structure of coupled system of hyperbolic and elliptic equations

研究代表者

西畑 伸也 (Nishibata, Shinya)

東京工業大学・情報理工学(系)研究科・教授

研究者番号：80279299

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 9,100,000円

研究成果の概要(和文)：プラズマ物理に現れるオイラー・ポアソン方程式に対して、多次元半空間上で単調な定常解が漸近安定であることを証明し、初期条件に応じた定常解への収束の速さを求めました。半導体の数理モデルの解析では、流体力学モデルの緩和時間極限を正当化し、複数のモデル間の階層構造を数学的に正当化しました。併せて、量子効果を考慮した流体力学モデルでプランク定数の零極限を考察し、古典モデルとの関係を数学的に明確にしました。一般的な方程式系に対しては、双曲 - 楕円型方程式系を研究する準備として、双曲 - 放物型方程式系の解析を行い、半空間上で定常解が存在し、漸近安定であることを示しました。さらに収束の速さを求めています。

研究成果の概要(英文)：We proved that a monotone stationary solution to the Euler-Poisson equations arising in Plasma physics is time asymptotically stable on mulch-dimensional half space. Moreover, we obtained the convergence rate, as time tends to infinity, subject to the initial condition. We gave the mathematical justification of the relaxation time limits in hydrodynamic models for semiconductor and made clear the hierarchy among several semiconductor model equations. For the general system of hyperbolic-parabolic coupled equations, we proved the existence and the time asymptotic stability of the stationary solution. We also obtained the convergence rate subject to the initial condition.

研究分野：非線形偏微分方程式

キーワード：オイラー方程式 ポアソン方程式 双曲型保存則 定常解 境界層 プラズマ シース 半導体

1. 研究開始当初の背景

身近な現象である気体や液体の流れ，ミクロな世界では半導体中の電子や正孔の挙動，一方マクロでは太陽や木星等の天体を組成するガスの挙動等，多種多様な物理現象は偏微分方程式による数理モデルで表され，方程式を解析することによって現象を精密に理解出来ます。数理モデルの多くは，隣接する二点間の相互作用を表す（有限伝播性を持つ）双曲型方程式，重力やクーロン力等互いに遠方にある二点間の相互作用を表す（ポアソン方程式に代表される）楕円型方程式，そしてそれらが連立した方程式系からなります。本研究課題は，物理現象に由来する双曲型方程式系と楕円型方程式系との連立した数理モデルの解析と一般的な双曲 - 楕円型方程式連立系の時間大域構造の解明を目的としています。

2. 研究の目的

数理モデルの解析，特にプラズマ物理に現れるオイラー・ポアソン方程式の定常解の解析に取り組みます。プラズマが固定壁に接触するとき，正イオンに比べ電子は過剰に壁に到達して固定壁は負に帯電し，プラズマと固定壁の間に電界を形成させます。この領域は，プラズマ物理学ではシース（鞘）と呼ばれる境界層となります。シースが形成される条件として，正イオンが極超音速でプラズマ領域からシース領域に流れ込むことを意味するボーム・シース条件が，1949年に物理学者ボームによって提案されました。その数学的な意味は長らく不明確でしたが，研究代表者等により，シースは数学的にはオイラー・ポアソン方程式の単調な定常解と定義され，ボーム・シース条件下でその存在が証明されました。本研究課題では，シース（単調な定常解）の漸近安定性を示すことが目的の一つとなります。

また数理モデルの研究では，半導体の解析に現れる流体力学モデルに対して，方程式中の物理パラメータの極限を考察し，複数のモデル

間の階層構造を解明することも目的とします。この問題は数学解析によってのみ解明される物理・工学的にも重要な問題です。

プラズマや半導体のモデル方程式以外にも研究代表者はこれまで，熱輻射を考慮した圧縮性粘性流体の方程式等の双曲 - 楕円型の数理モデルを研究してきました。これらの数理モデルは全てエントロピー関数を持ち，それを用いて対称化され，さらに安定性条件と呼ばれる消散構造を保証する性質を有しています。こうした点に着目して，一般的な双曲 - 楕円型方程式系の研究では，エントロピー関数の存在と安定性条件を仮定し，時間大域構造の解明を目指します。具体的には定常解，希薄波，進行波解などの典型的な非線形波動の存在と漸近安定性を証明し，それらへの収束の仕組みを解明します。多くの未解決な問題がありますが，まずは定常解の解析に取り組みます。

3. 研究の方法

本研究課題で取り扱われる双曲 - 楕円型方程式系の数学解析では，エントロピー関数を用いて定義されるエネルギー形式を利用した積分量の評価に加えて，線形化方程式の基本解の評価や，楕円型方程式の解析に用いられる幾つかの不動点定理等，様々な数学的手法を組み合わせる研究が必要となります。従って，こうした分野を専門とする研究者達と活発な交流・情報交換を行い，研究を進めます。物理的な数理モデルの研究では，数値解析スキームの研究やコンピュータへの実装を行い，解の挙動を可視化し研究を深化します。

4. 研究成果

プラズマ物理に現れるオイラー・ポアソン方程式と一般的な方程式系に対する研究成果を主に報告します。なお，半導体のモデル方程式の研究では，流体力学モデルに関して，緩和時間極限を数学的に正当化し，モデル間の階層構造を解明にしました。また，量子効

果を考慮した流体力学モデルの研究も行い、プランク定数の零極限が(古典的な)流体力学モデルとなることも正当化しています。

プラズマ物理に現れるオイラー・ポアソン方程式に対しては、多次元半空間上でシース(単調な定常解)が漸近安定であることを証明しました。その際、ボーム・シース条件はシースが存在して漸近安定となる為の十分条件であることを示しました。さらに、線形化方程式のスペクトル解析を行い、ボーム条件は線形安定性の必要条件でもあることを示しています。漸近安定性の証明では、エネルギー法を用いて重み付きソボレフ空間上でアприオリ評価を導出してますが、スペクトル解析からもこの方程式系の解析には適切な空間であると考えられます。数学的な解析に加えて数値シミュレーションを行い、解がシースに漸近する様子をコンピュータ上で可視化しました。数値解析スキームではオイラー方程式の解法に、Lax-Friedrichsスキーム等5通りのスキームを実装し解析を行いました。その結果、収束の速さ及びスキームの安定性の両観点から、Roeスキームが最も優れていることが結論づけられました。

一般的な双曲 - 楕円型方程式系の研究では、双曲型方程式系と楕円型方程式系との連立の仕方によっては解析が困難となり、その解消の為準備として双曲 - 放物型方程式系及び消散構造をもつ双曲型方程式系に対して研究を行いました。双曲 - 放物型方程式系に対する研究では、半空間上で定常解が存在し、漸近安定であることを証明しました。また、初期値に応じた定常解への収束の速さも求めています。これらの結果は、エントロピー関数が存在し、安定性条件が成り立つことを仮定して得られています。一方、すべての特性速度が負になる境界条件下では、安定性条件が成立しなくても、定常解が漸近安定性となることも示しています。また、希薄波の漸近安定性も証明しました。消散構造を持つ

双曲型方程式系に対しても、定常解の存在と漸近安定性を証明しました。こうした研究を通して発見した解析手法を用いて、双曲 - 楕円型方程式系に対する解析を行い部分的な成果を得ています。具体的には、適当な仮定の下での定常解の存在と漸近安定性の証明ですが、残念ながら仮定の一部はプラズマのモデル方程式等では満たされません。こうした欠点を改善すべく、今後も研究を継続する所存です。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 16 件)

Shinya Nishibata, Masashi Ohnawa

Masahiro Suzuki, The mathematical justification of the Bohm criterion in plasma physics, *Advanced Studies in Pure Mathematics*, 64, 489-495, 2015 (査読有)

<http://www.worldscientific.com/series/aspmp>.

L. Fan and A. Matsumura, Asymptotic stability of a composite wave of two viscous shock waves for the equation of non-viscous and heat-conductive ideal gas, *J. Differential Equations*, 258 (4), 2015, 1129-1157.

doi:10.1016/j.jde.2014.10.010 (査読有)

S. Katayama, A. Matsumura and H. Sunagawa, Energy decay for systems of semilinear wave equations with dissipative structure in two space dimensions, *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA*, 22, 601-628, 2015 (査読有)

DOI:10.1007/s00030-014-0297-7.

X. Huang and A. Matsumura, A characterization on breakdown of smooth spherically symmetric solutions of the isentropic system of

compressible Navier-Stokes equations, Osaka J. Math. 52, 271-283 2015 (査読有).

Shinya Nishibata, Masashi Ohnawa Masahiro Suzuki, Nonlinear stability of boundary layer solutions to the Euler-Poisson equations in plasma physics, Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications, 817-822, 2014 (査読有)
<http://www.springer.com/gp/book/9783540757115>.

Tohru Nakamura, Shinya Nishibata, Energy estimate for a linear symmetric hyperbolic-parabolic system in half line, Kinetic and Related Models, 6, 2013, 883-892, (査読有)
DOI: 10.3934/krm.2013.6.883.

Shinya Nishibata, Masashi Ohnawa Masahiro Suzuki, Asymptotic stability of boundary layers to the Euler-Poisson equations arising in plasma physics, SIAM J. Math. Anal., 44, 761-790, 2012 (査読有)
DOI:10.1137/110835657.

A. Matsumura and N. Yoshida, Asymptotic behavior of solutions to the Cauchy problem for the scalar viscous conservation law with partially linearly degenerate flux, SIAM J. MATH. ANAL. 44 (4), 2526-2544, 2012 (査読有).

Shinya Nishibata, Masahiro Suzuki, Hierarchy of semiconductor equations: relaxation limits with initial layers for large initial data, MSJ Memoir, 26, 1-113, 2011, (査読有)
ISBN: 978-4-931469-66-2.

Tohru Nakamura, Shinya Nishibata, Stationary wave associated with an

inflow problem in the half line for viscous heat-conductive gas, Journal of Hyperbolic Differential Equations, 08, 651-670, 2011, (査読有)

DOI: 10.1142/S0219891611002524

J. Li and A. Matsumura, On the Navier-Stokes equations for three-dimensional compressible barotropic flow subject to large external potential forces with discontinuous initial data, J. Math. Pures Appl. 95, 495-512 2011 (査読有)
Shuichi Kawashima, Tohru Nakamura, Shinya Nishibata, Peicheng Zhu, Stationary waves to viscous heat-conductive gases in half space: existence, stability and convergence rate, Math. Models and Methods Appl. Sci., 20, 2201-2235, 2010 (査読有)

Shinya Nishibata, Naotaka Shigeta, Masahiro Suzuki. Asymptotic behaviors and classical limits of solutions to a quantum drift-diffusion model for semiconductors, Math. Models and Methods Appl. Sci., 20, 909—936, 2010 (査読有)

Li, Hai-Liang; Matsumura Akitaka, Zhang, Guojing, Optimal decay rate of the compressible Navier-Stokes-Poisson system in \mathbb{R}^3 Arch. Ration. Mech. Anal. 196 (2) 681-713, 2010 (査読有)

F. Huang, J. Li and A. Matsumura, Asymptotic stability of viscous contact wave with rarefaction waves for one-dimensional compressible Navier-Stokes system, Arch. Ration. Mech. Anal. 197, 89-116, 2010 (査読

有)

A. Matsumura and Y. Wang,

Asymptotic stability of viscous shock wave for a one-dimensional isentropic model of viscous gas with density dependent viscosity, *Methods and Applications of Analysis*, 17 (3), 279-290, 2010 (査読有)

[学会発表](計 19 件)

Shinya Nishibata, Stationary waves to symmetric hyperbolic-parabolic systems in half line, (International Conference on Nonlinear Analysis, Institute of Mathematics, Academia Sinica, Taiwan, October 31, 2015)

Shinya Nishibata, Stationary waves to symmetric hyperbolic-parabolic systems in half line, (Workshop on Hyperbolic Conservation Laws and Related Topics, Seoul National University, June 22-25, 2015)

Shinya Nishibata, Stability of stationary solutions to hyperbolic-parabolic systems in half space and the convergence rate, (スペクトル・散乱理論とその周辺, 数理解析研究所, 京都大学, October 15-17, 2014)

Shinya Nishibata, Asymptotic stability of stationary solutions to the Euler-Poisson equation in plasma physics, (Wayamba International Conference 2014, Wayamba University of Sri Lanka, August 28-29, 2014)

Shinya Nishibata, Asymptotic stability of stationary solutions to hyperbolic-parabolic systems in half space and the convergence rate (Summer Workshop on Kinetic Theory

and Gas Dynamics, Stanford Univ., U.S., July 15-24, 2014)

Shinya Nishibata, Stationary Solutions to Symmetric Hyperbolic-parabolic Systems in Half Space (10th AIMS International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Universidad Autonoma de Madrid, Spain, July 7-11, 2014)

Shinya Nishibata, Asymptotic stability of stationary solutions to symmetric hyperbolic-parabolic systems in half space and the convergence rate (2014 International Conference on Nonlinear Evolutionary Partial Differential Equations, Shanghai Jiao Tong University, PRC, June 3-8, 2014)

Shinya Nishibata, Asymptotic stability of stationary solutions to the Euler-Poisson equation arising in plasma physics, (IMS Workshop on Nonlinear PDEs from Fluids and related Topics, The Chinese university of Hong Kong, Hong Kong, March 24-26, 2014)

Shinya Nishibata, Stationary waves to symmetric hyperbolic-parabolic systems in half space (The 9th Japanese-German International Workshop on Mathematical Fluid Dynamics, Waseda University, November 5-8, 2013)

Shinya Nishibata, Boundary layer to symmetric hyperbolic parabolic systems (International Workshop on Nonlinear Analysis: Fluid Dynamics and Kinetic Theory, Academia Sinica, Taipei, Taiwan ROC, October 21-25, 2013)

Shinya Nishibata, Boundary layer solution to the hyperbolic-parabolic system (International Conference on the Mathematical Fluid Dynamics, Hotel Nikko Nara, March 5-9, 2012)

Shinya Nishibata, Stationary solution to symmetric hyperbolic-parabolic system in half space (Evolutionary PDE and Kinetic Theory at, Academia Sinica, Tai-Pei, Taiwan, October 29-November 2, 2012)

Shinya Nishibata, Asymptotic stability of a stationary solution to the Euler-Poisson equation in plasma physics, (Kinetic Theory and Related Fields: Theoretical and Numerical Approaches, Kyoto Univ., September 24-28, 2012)

Shinya Nishibata, Asymptotic stability of a stationary solution to the Euler-Poisson equation arising in plasma physics (Kinetic Theory and Gas Dynamics Summer Workshop, Stanford Univ., U.S. July 8-28, 2012)

Shinya Nishibata, Asymptotic Stability of Stationary Solutions to the Euler-Poisson Equations in Plasma Physics, (International conference on nonlinear evolutionary partial differential equations, Shanghai Jiao Tong Univ., P. R. China, June 12-17, 2012)

Shinya Nishibata, Asymptotic stability of boundary layers to the Euler-Poisson equation in plasma physics, (Mathematical approach to emerging topics in materials science 2012, Tohoku Univ., Feb.18-19, 2012)

Shinya Nishibata, Asymptotic stability of boundary layers to the Euler-Poisson

equation arising in plasma physics, (8th East-Asia PDE conference, Pohang University of Science and Technology, Pohang, Korea, December 19-23, 2011)

Shinya Nishibata, Mathematical analysis on semiconductor equations: model hierarchy and asymptotic behavior, (Nonlinear dynamics in partial differential equations, Kyushu University, Fukuoka, Sept. 12-21, 2011)

Shinya Nishibata, Asymptotic stability of boundary layers to the Euler-Poisson equation in plasma physics, (Applied Mathematics Euskadi-Kyushu 2011, Basque Center for Applied Mathematics, Spain, March 10-11, 2011)

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年月日:

国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

取得年月日:

国内外の別:

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.is.titech.ac.jp/~shinya/lab/index-j.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

西畑 伸也 (Nishibata, Shinya)

東京工業大学・情報理工学研究所・教授

研究者番号: 80279299

(2) 研究分担者

松村 昭孝 (Matsumura, Akitaka)

大阪大学・情報科学研究科・名誉教授

研究者番号: 60115938