様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月 １６ 日現在

機関番号：３２６０６
研究種目：基盤研究(B)
研究期間：2010～2014
課題番号：２２３４００２９

研究課題名（和文）量子物理学の数理解析

研究課題名（英文）Mathematical Analysis of Quantum Physics

研究代表者
谷島　賢二（Yajima, Kenji）

学習院大学・理学部・教授

研究者番号：８００１１７５８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　10,300,000円

研究成果の概要（和文）：電子や原子など微小粒子は量子力学によって記述され、これらの粒子の状態はシュレーディンガー方程式と呼ばれる偏微分方程式に従って変化する。報告者はシュレーディンガー方程式に対する初期値問題に関する研究を行い、方程式が粒子系の運動を一意的に決定するための粒子の間に働く力、ならびに粒子に外部から働く力に対する極めて一般的な十分条件を与えた。粒子の運動の時間無限大での挙動を記述する、散乱の波動作用素と呼ばれる線形写像は関連した多くの解析学の問題に重要な役割を演ずる。報告者はこの作用素の適当な空間での連続性など、数学的に重要ないくつかの性質を明らかにした。

研究成果の概要（英文）：Small particles like electrons and atoms are described by quantum mechanics and their dynamics is governed by Schrodinger equations which are partial differential equations for complex valued functions. The reporter studied the initial value problem for Schrodinger equations and, he has found very general sufficient conditions on inter-particle and external forces acting on the particles for the equation to generate a unique dynamics of the particles. The wave operators of the scattering theory for the Schrodinger equations, which describe the large time behavior of the particles, play important roles in various other topics of analysis. The reporter simultaneously studied the wave operators and has found various mathematically important properties such as the continuity as mapping from suitable function spaces.

研究分野：関数解析学、数理物理、偏微分方程式

キーワード：シュレーディンガー方程式　初期値問題　散乱理論　波動作用素　量子力学　偏微分方程式

１．研究開始当初の背景

1) 量子力学の基本方程式であるシュレーディンガー方程式が量子力学的粒子系の運動を一意的に決定するか否かは量子力学の誕生以来の問題である。粒子系の運動を特徴付けるハミルトニアンと呼ばれる作用素が時間に依存しない場合、この問題はハミルトニアンの状態空間における自己共役性の問題と等価であり長い研究の結果ほぼ解決されている。しかし、ハミルトニアンが時間に本質的に依存する場合は、多くの研究者の長年の研究にもかかわらず、一意存在のために得られている結果はポテンシャルの無限遠方での挙動に関する条件や、時空の各点における不連続性に関する条件が強すぎて、物理学における重要ないくつかの問題に適用できない状態であった。

2) 無限遠方で十分速く減衰する電場のポテンシャルをもつ（磁場なしの）シュレーディンガー方程式の初期値問題の解のルベーグ空間における時間無限大での漸近挙動が研究されていた。その結果、シュレーディンガー作用素のスペクトルが連続スペクトルの下端において正則的な場合は、連続スペクトル空間に属し可積分な関数を初期値とする解は、空間次元が d の時, 空間変数に関する最大値が時間の d/2 の負巾のオーダーで減衰するといういわゆる分散型評価が成立することが研究開始のころすでに証明されていたが、スペクトルが連続スペクトルの下端で特異的な場合に、上の様な解がルベーグ空間においてどのように振る舞うかについては、３次元空間において以外では、なにも知られていなかった。また分散型評価が成立する場合に時間無限大における解のルベーグ空間における漸近展開が可能であるか否か、特に主要項はどのように表現されるかの研究もなされていなかった。

3) ポテンシャルに対する適当な条件の下で、（磁場を持たない）シュレーディンガー作用素の散乱理論の波動作用素が、シュレーディンガー作用素のスペクトルが連続スペクトルの下端で正則的な場合には、１から∞の間の任意の指数のルベーグ空間において連続であることが研究開始当時すでに、研究代表者によって証明されていた。また、スペクトルが下端において特異的である場合には空間次元をｄとする時, d/(d-2)と d/2 の間の指数をもつルベーグ空間において連続となるということがいくつかの次元において示されていたが、空間次元を一般的にすること、ならびに、これらの指数が最適あるかどうかが問われていた。

２．研究の目的

1) 時間に依存する電場あるいは磁場のポテンシャルをもつ多体ならびに一粒子シュレーディンガー方程式が粒子系の運動を一意的に決定するためのポテンシャルの無限遠方での増大度ならびに局所的な不連続性に関する十分条件を、物理学で通常現れる方程式に対してもれなく適用できる程度に十分に一般的な形で与える。

2) 空間無限遠方で十分速く減衰するポテンシャルをもつ（磁場なし）シュレーディンガー方程式の, 初期値が連続スペクトル部分空間に属する解の漸近挙動を、３次元以上の空間において、かつシュレーディンガー作用素のスペクトルが連続スペクトルの下端に特異性を持つ場合について研究する。特に、初期値が指数 p のルベーグ空間に属すれば解が時間無限大において双対指数ｑのルベーグ空間で期待される減衰度で減衰するための p の範囲を明らかにする。ただし, ｑが p の双対指数とは 1/p +1/q=1 を満たすことである。またこの時の解の時間無限大での漸近展開を与え、その主要項を明示する。

3)　シュレーディンガー作用素のスペクトルが連続スペクトルの下端に特異性を持つ場合について、散乱理論の波動作用素が連続作用素となるルベーグ空間の最良指数をすべての空間次元に対して明らかにし、これまでの結果を改良し、同時にこの結果を上記の問題 2)に適用する。

３．研究の方法

電子媒体あるいは研究学術雑誌によって、研究課題に関連したプレプリントを含む文献を収集して研究情報を収集した。また国内外の研究集会やセミナーに参加するとともに、学習院大学において定期的に研究セミナーを開催して最新の研究情報を収集した。さらに海外から、研究課題に関連した研究を行っている指導的な研究者を招聘し、また研究代表者がこれら研究者のもとを一定期間訪問して、共同研究ならびに研究討議を行った。数学の研究は研究者本人の自己研鑽によるところが多いのはもちろんであるが、研究集会やセミナーを通しての情報、これらの共同研究ならびに研究討議によって得られた多くのアイデアの示唆は特に課題の研究の進展に極めて有益であった。

４．研究成果

1)　シュレーディンガー方程式が量子力学的粒子系の運動を一意的に決定するかの問題に関して、次を証明した。磁場のポテンシャル対しては局所的な正則性の条件以外には無限遠方での増大の仕方になんら条件を置かず、また電場のポテンシャルには同様な正則性の他には、電磁場の中で量子力学的粒子に対応する古典的な粒子が有限時間の間に無限遠方には飛散しないという負の方向に関する増大度の条件だけを仮定する。この時、電場のポテンシャルの時間微分が量子調和振動子に関して有界、磁場のポテンシャル

の時間微分が量子調和振動子の平方根に関して有界であればシュレーディンガー方程式は粒子系の運動を一意的に決定することを証明した。

２）また、磁場のポテンシャルが無限遠方で高々一次関数的、電場のポテンシャルは正負の方向に高々二次関数的にしか増大しない場合に研究代表者の従来の１粒子シュレーディンガー方程式に関する結果を多体粒子系に対して拡張して、電場の時間微分の不連続性に関する条件を緩和し、物理的に興味のあるほとんどすべてのシュレーディンガー方程式に適用可能な極めて一般的な解の一意存在定理を得た。1)、２）の結果はこの分野における進展が長期間にわたってほとんどなかったことから、時間に依存するポテンシャルを持つシュレーディンガー方程式の初期値問題の可解性に関する基本文献の一つとなることが期待される。またこの論文で証明された新たなストリッカーツ不等式や、調和振動子に対する新たな評価式は、量子力学の数理解析に役立つことが期待できる。

３）無限遠方で減衰する電場ポテンシャルをもつ（磁場無し）シュレーディンガー方程式の初期問題の解の時間無限大におけるルベーグ空間における漸近展開公式を、シュレーディンガー作用素のスペクトルが連続スペクトルの下端で特異性を持たない場合に、ポテンシャルに対するほぼ最弱の減衰条件のもとで証明した。シュレーディンガー方程式の解の漸近挙動に関する重み付き空間での漸近展開公式を改良し、解の挙動に関する知見を広めることになった。また、下記の波動作用素に関する研究成果を用いて、２次元、４次元空間を除いた空間において、ペクトルが連続スペクトルの下端で特異性を持つ場合の異なった指数を持つルベーグ空間の間の評価を適当に制限された最良の指数に対して初めて証明した。この結果によって、ストリッカーツ不等式が、自由シュレーディンガー方程式よりも制限された指数においてではあるが、成立することがわかる。この結果はポテンシャルをもつ非線形シュレーディンガー方程式の初期値問題の解の時間無限大での漸近挙動の解析の重要な道具となることが期待される。

４）シュレーディンガー作用素のスペクトルが連続スペクトルの下端に特異性を持つ場合に、散乱理論の波動作用素が連続となるルベーグの指数は３次元の時は１から３のあいだ、空間次元 d が奇数の場合は１から d/2 の間のであることを示した。これらは端点を除けば最良である（ただし一次元の時は既知、端点１と d/2 ではどうなるか未解決である)。また空間次元が偶数の時にも次元が６以上であれば同様に指数が１と d/2 の間であるルベーグ空間において連続であることを示した。この様にして、この問題を空間次元が２次元と４次元の場合を除いてほぼ完全に決定した。波動作用素はハミルトニアンの連続スペクトル部分の関数を自由ハミルトニアンの対応する関数に変換する作用素で、ハミルトニアンの関数の解析を自由ハミルトニアンの関数の解析に帰着する。このため、解析学あるいは量子力学の数理物理学における多くの場面での応用が期待できる。じっさい上に述べた問題３）にはすでに応用され部分的な指数に対するストリッカーツ不等式が得られている。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計７件）

① Galtbayar Artbazar, Yajima Kenji , Resolvent estimates in amalgam spaces and asymptotic expansions for Schrodinger equations （日本語）, RIMS Kokyuroku Bessatsu, B45 巻, 113-130 （④の日本語解説版）

② Yajima, Kenji, Dispersive estimates for Schrödinger equations, Sugaku Expositions, 27 巻, 2014, 147-174. （⑤の増補改訂版の英語訳）

③ Aiba, Daisuke, Yajima, Kenji, Schrödinger equations with time-dependent strong magnetic fields. Algebra i Analiz, 25 巻, 2013, 37--62 ならびに St. Petersburg Math. J. 25 巻, 2014, 175-194 （後者は前者の英訳）

④ Galtbayar, Artbazar, Yajima, Kenji, Resolvent estimates in amalgam spaces and asymptotic expansions for Schrödinger equations. J. Math. Soc. Japan 65 巻, 2013, 563-605.

⑤ Yajima, Kenji, Schrödinger equations with time dependent unbounded singular potentials. Rev. Math. Phys. 23 (2011), no. 8, 823-838.

⑥ 谷島 賢二 シュレーディンガー方程式に対する分散型評価, 数学 62 巻 (2010), 145-163.

⑦ Jensen, Arne, Yajima, Kenji, Spatial growth of fundamental solutions for certain perturbations of the harmonic oscillator、Rev. Math. Phys. 22 (2010), 193-206.

〔学会発表〕（計１５件）

① 谷島 賢二、シュレーディンガー方程式と調和解析の接点、日本数学会企画特別講演、明治大学駿河台校舎, 2015 年 3 月 21 日

② 谷島 賢二 波動作用素のルベーグ空間での有界性、再論、研究集会「スペクトル・散乱理論とその周辺」2014 年 10 月

17 日、京都大学数理解析研究所.
③ 谷島　賢二 Hydrogen-like atom in semi-classical electro-magnetic fields'' 研究集会「量子場の数理とその周辺」、2014 年 10 月 7 日，京都大学数理解析研究所
④ 谷島賢二、 L^p-boundedness of wave operators, revisited, Math, Physic Work Shop, 2014 年 8 月 20 日, Aarhus 大学（オーフス、デンマーク）
⑤ 谷島　賢二，Existence and uniqueness of the propagator for Schrodinger equation with exploding magnetic fields, Math. Phys. Work shop in Aarhus, 2013 年 8 月 15 日，Aarhus 大学,オーフス（デンマーク）
⑥ 谷島　賢二，Existence of a unique propagator for Schrodinger equation with singular and unbounded potentials, conference "Variational and Spectral methods in quantum mechanics", 2013 年 4 月 20 日，ポアンカレ研究所、Paris（フランス）
⑦ 谷島　賢二，Existence of unitary propagators for Schrodinger equations, Work-shop "Hamiltonians in magnetic fields" 2012 年 12 月 10 日，Mittag-Leffler Institute, Djursholm (スエーデン)
⑧ 谷島賢二，Existence of propagator for Schrodinger equation with strong magnetic fields, 研究集会 Mathematics of multi-particle Systems, 2012 年 7 月 13 日，Berlin 工科大学 Berlin（ドイツ）
⑨ 谷島　賢二，Resolvent estimates in amalgam spaces and asymptotic expansion for Schrodinger equations, Oberseminar Math. Physik, 2012 年 7 月 10 日，ミュンヘン大学，Muenchen（ドイツ）
⑩ 谷島　賢二，Resolvent estimate and asymptotic expansion for Schrodinger equations, 研究集会「Harmonic Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations」2012 年 7 月 3 日．京都大学数理解析研究所
⑪ 谷島賢二，Resolvent estimate and asymptotic expansion for Schrodinger equations, Math-Physics Seminar, 2012 年 2 月 23 日，SISSA、 Trieste（イタリア）.
⑫ 谷島　賢二，アマルガム空間とシュレーディンガー方程式に対する漸近展開，九州関数方程式セミナー、 2011 年 6 月 3 日，福岡大学セミナーハウス
⑬ 谷島　賢二，シュレーディンガー方程式の分散型評価'' 「早稲田
⑭ 大学非線形偏微分方程式研究所」設立記念研究集会、2010 年 11 月 11 日、早稲田大学
⑮ 谷島　賢二，シュレーディンガー方程式の分散型評価，第 36 回偏微分方程式札幌シンポジウム，2010 年 8 月 23 日，北海道大学

〔図書〕（計　2　件）
① 谷島　賢二、朝倉書店、シュレーディンガー方程式 I, 2014, 322 ページ
② 谷島　賢二、朝倉書店、シュレーディンガー方程式 II, 2014, 271 ページ

６．研究組織
(1)研究代表者
谷島　賢二（YAJIMA, Kenji）
学習院大学・理学部。教授
研究者番号：80011758