科学研究費助成事業　研究成果報告書

平成 ２６ 年 ６ 月 １１ 日現在

機関番号：１０１０１
研究種目：基盤研究(B)
研究期間：2010～2013
課題番号：２２３４００３０

研究課題名（和文）サブリーマン幾何からトロピカル幾何まで実代数幾何的綜合研究

研究課題名（英文）The synthetic study by real algebraic geometry, from sub-Riemannian geometry to tropical geometry

研究代表者
石川 剛郎（Goo, Ishikawa）

北海道大学・理学（系）研究科（研究院）・教授

研究者番号：５０１７６１６１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 11,700,000円、（間接経費） 3,510,000円

研究成果の概要（和文）：サブリーマン幾何やトロピカル幾何と関連する外微分式系の積分曲線に付随する特異曲面に関して，実代数幾何の見地から特異性の分類を実行し，ジェネリックな標準形を完成させた．ルジャンドル双対性と制御理論の見地から，枠付き曲線や曲面の接線ヴァライティーの特異性を分類し，写像のオープニング構成の概念を発展させ，一般の部分多様体の接線ヴァライティーの特異性の分類問題に応用した．また，G2サブリーマン幾何を非線形制御理論と実代数群の表現論の側面などから研究し，関連する特異性を分類した．さらにD4幾何の三対性とD型特異点論を進展させた．以上について論文を執筆し，国際的学術雑誌に発表済みまたは現在投稿中である．

研究成果の概要（英文）：For singular surfaces associated to integral curves of exterior differential systems related to sub-Riemannian geometry and tropical geometry, we have realized the classification of singularities from real algebraic geometry, and we have completed their generic normal forms. From Legendre duality and control theory, we have classified singularities of tangential varieties to singularities of framed curves and surfaces, we have developed the notion of opening of mappings, and we have applied it to the classification for singularities of tangential varieties to general submanifolds. We have studied G2 sub-Riemannian geometry from non-linear control theory and the representation theory of real algebraic groups, and we have classified the related singularities. Moreover, we have developed the triality of D4 geometry and D4 singularity theory. We have completed the papers for all above themes, all of which already appeared or are under submission in international academic journals.

研究分野： 数物系科学

科研費の分科・細目： 数学・大域解析学

キーワード： tangent surface　opening construction　open swallowtail　open Mond surface　open Scherback surface　hyperfield　Cartan's G2-geometry　triality

１. 研究開始当初の背景

(1)実代数幾何(real algebraic geometry) は「代数幾何」の一分野ではない．実代数幾何は代数幾何のサブセットではなく，代数幾何とは別の視野を持った一つの方法である．実代数幾何は，せまい意味の代数幾何よりも広い視野を持った一つの方法である．したがって,実代数幾何という方法があり,普遍的な方法の一つとして国際的に認知されている．

(2) 実代数幾何は，制御理論とsub-Riemann 幾何と関係する．制御理論では状態の変化の仕方に制約がついた最適化問題がしばしば現れる．その制約を与える接部分ベクトル束に速度ベクトルが属するような曲線のみを対象として，接分布の正定値Riemann 計量に関する局所最短線(測地線)を求める問題である．接分布がブラケット生成的のとき，状態空間に距離（Carnot-Caratheodory 距離）が定まる．通常のRiemann 幾何とは状況が非常に異なり，単射半径はゼロである．この距離の性質，とくに微小球面の特異性や距離関数の劣解析性（Hironaka により定義された概念）が重要問題となっている．離散群の Gromov-Hausdorff極限に現れる sub-Finsler 幾何も背景にある．Gromov, Pansu によって，有限生成離散冪零群 (word metric付き)の距離空間としての極限が次数付き冪零Lie群 (Carnot 群) の左不変 sub-Finsler Carnot-Caratheodory 距離となり，その sub-Finsler計量は，対応する Lie 環の部分空間上のノルムから決まり，それは離散群の生成系から決まる有限凸包により定まる (Minkowski 計量)．この計量は代数性と共に特異性を持ち，そのために，制御理論がトーリック幾何あるいはトロピカル幾何の対象となる．

(3) トロピカル幾何学は，実数体上に，最大値をとるという２項演算を和とし，通常の和を積とする代数系（通常の演算の「トロピカル極限」として得られる，順序構造も関与する）に基づいた代数幾何のことである．代数幾何，とくにトーリック幾何・トポロジー, 可積分系, 力学系, 計算理論等と深く関わる．さらに, 実数冪 Puiseux-Laurent 級数の作る体上のトーリック幾何それ自体とトロピカル幾何の関連も明らかにされている．Mikhalkin 等により，トロピカル極限に近い実代数多様体のトポロジーの理論を構築する手がかりを見いだされ，「トロピカル化」と呼ばれる操作を幾何学的に深く理解することが可能となっている．実代数幾何・位相幾何における問題に組み合わせ論や超離散幾何やオートマトン理論が係る，領域を超えた新しい研究が行われている．

(3) また，この研究課題の背景には，モンジュ・アンペール方程式と接触幾何学がある．実代数幾何の中で，ダイマー模型と関連して，アメーバ上にモンジュ・アンペール方程式（ヘッシアン型）が現れる（ Kenyon，Okounkov, Sheffield，Dimers and amoebae，Annals of Math．163 (2006))．トロピカル幾何の立場から，モンジュ・アンペール方程式の離散化(あるいは,超離散化)が研究される．サイン・ゴルドン方程式の離散化が行われる．モンジュ・アンペール方程式は,外微分式系の言葉に よって明確に定式化される偏微分方程式の自然なクラスを形成する．曲面論におけるワインガルテン曲面，とくに平均曲率一定曲面やガウス曲率一定曲面はモンジュ・アンペール方程式の解の重要な例である．アフィン幾何の重要な対象であるアフィン球面もモンジュ・アンペール方程式の解である．空間形の中の平坦曲面もそうである．ガウス写像の退化性を記述する方程式もモンジュ・ アンペール方程式である．一方，ミラー対称性の研究から，特別ラグランジュ多様体の特異性の研究がジョイス達によってなされているが，特別ラグランジュ多様体は，ヘッシアン = ラプラシアン型の モンジュ・アンペール方程式の解である．また，気象学で重要なチノウェ

ス・セウェル方程式もモンジュ・アンペール方程式である．

２．研究の目的

(1) 微分幾何における新しい分野であり，制御理論，外微分式系の研究と密接に関連する「サブリーマン幾何」から，計算機科学の分野から生まれ，代数幾何，とくにトーリック幾何・トポロジー，可積分系，力学系，数理物理と関連して研究されている新しい分野である「トロピカル幾何」に及ぶ具体的なテーマに対し，実代数幾何の方法をあまねく適用し，実質的な成果を挙げることを目標とする研究課題である．実質的な成果によって，各分野の発展に新しい視点から寄与することはもちろん，実代数幾何として目に見える結果を導くことにより，各分野の理論の深さ・相互関係が明確にわかることになる．いわば「実代数幾何という鏡」を，サブリーマン幾何からトロピカル幾何までに向けることにより，何が映し出されるかという理論的実験を実行する，という独創的な視点をもつ研究課題である．

(2) 離散凸 sub-Finsler 計量に関する Carnot-Caratheodory 距離の解明：Finsler 計量は，通常（零切断の外で）可微分性と強凸性が仮定されているが，その条件を満たさないが，Gromov-Hausdorff 極限として得られる離散凸性をもつ場合Carnot-Caratheodory 距離の測地線，劣解析性，微小球面の特異性を解析する．トロピカル実代数集合の特異性・位相の解明：特に Lie 環上のトロピカル実代数集合の特異性や位相構造が左不変 Carnot-Caratheodory 距離の特異性・位相にどう影響するかを解析する．実代数的特別 Lagrange 多様体の特異性の解明：実代数幾何・トロピカル幾何の離散 Legendre 変換を通して，特別 Lagrange 多様体の特異性とその離散化を解析する．さらに，関連する接触特異点・シンプレクティック特異点で未解決な Givental 予想（任意の特異 Legendre 多様体がcorank 1 のみの特異性をもつ Legendre 多様体で近似できるか？）を実多項式写像の場合に解決する．また，特異点の不変量として arc-invarinats および blow-invarinat があるが，接触・シンプレクティック構造のもとで構成する．

３．研究の方法

(1) 研究代表者は，研究課題「外微分式系への応用特異点論」研究課題「コントロール理論への特異点論の応用」によって，sub-Riemann 幾何と制御理論について研究を行い，また，研究課題「トロピカル幾何の位相代数幾何への応用」(H19～H20) によって，トロピカル幾何に本質的に現れる離散 Legendre変換とMonge-Ampere 幾何の関係を新たに発見し，アメーバ理論，超幾何関数論との関連においてダイマー模型に Monge-Ampere 方程式が現れる(Kenyon，Okounkov，Sheffield) その要因について研究を行ってきた．

(2) 本研究課題では，研究代表者・分担者，さらに研究代表者との共同研究の実績のある待田芳徳，高橋雅朋，また，サブリーマン幾何の専門家である北川友美子らが連携研究者となり，関連する専門家の協力のもとに，連携して課題を遂行するものである．

(3)関連研究者との交流の基盤・横軸として，本研究課題では「実代数幾何という方法」と「サブリーマン幾何，トロピカル幾何という対象」を置いた．実代数幾何の方法の普遍性に注目するからである．人的交流を活発化するために，広報を充実させ，窓口を明確にして，情報の停滞をなくし，研究代表者，分担者，連携研究者，関連する専門家が風通しよく交流できる機会を設定する．そのためのさまざまな仕掛けを，研究課題遂行を通して作ることが主要な研究方法となる．

4．研究成果

(1) サブリーマン幾何に現れる外微分式系として，特に接触構造および Engel 構造，さらに G2構造(カルタン構造)について取り上げ，それらの積分曲線の特異性について考察した．付随する特異曲面に関して，実代数幾何的な見地から，新しい特異点の分類を実行し，ジェネリックな特異点の標準形を完成することができた．

(2) また一方では，トロピカル幾何学に関する最近の動向と，超体(hyperfield)のアイディアについて，国際研究集会の講演(G.Ishikawa, Basic Topics on Tropical Geometry and Singularities,)を行い，関連する研究打ち合わせ・情報交換を国内外の研究者とともに行った．

(3) その後，Legendre 双対性と制御理論・外微分式系の理論の見地から，曲線や曲面の“ tangent variety ”の特異性を一般的に考察し，現時点において，「関数の K-類の分布」という射影不変量を新しく認識し，sub-front の概念や曲面の opening 構成の概念を獲得するに至っている． なお，G2 構造に関する分類については論文を執筆し，国際的学術雑誌に投稿中である．

(4) ルジャンドル双対性と制御理論・外微分式系の理論の見地から，枠付き曲線や曲面の“ 接線ヴァライティー ”の特異性を一般的に考察した．さらに，部分多様体の接線ヴァライティーの特異性の分類問題に，写像の「オープニング構成」の概念を発展させ応用した．これに関しても論文を執筆し出版した．

(5) 一方，制御理論においてトロピカル幾何・凸幾何と密接に関係し重要であるフィリポフ理論およびカラテオドリ理論と関連させて，ジェネリックな制御システム，特に，アフィン・システムにおいてポントリャーギンの最大値原理により一般化されたハミルトン方程式の解として特徴付けられる特異トラジェクトリの測度論的・幾何学的性質について，実代数幾何的側面（半代数幾何，劣解析幾何，横断性定理）からの解明を実行中である．

(6) 実代数幾何的な見地から,種々の幾何学に現れる特異曲面の分類を実行し,ジェネリックな特異点の標準形，「開化」(opening)の概念を創始・応用し，研究成果を既に国際研究集会のプロシーティング等に出版した．さらに理論を,Cartanの G2 幾何学に応用し，そこに自然に現れる特異曲面の分類を行った．

(7) G2サブリーマン幾何の局所・大域的な双対性を非線形制御理論と実代数幾何・実代数群の表現論の側面および rolling ball 問題の微分幾何･位相幾何な側面から研究した（連携研究者 北川友美子）．

(8) また，G2幾何と密接に関連し，D4-三対性の研究を進め，双対性に関する A型特異点論を発展させて,D型特異点論を推進した．さらに，一般の例外リー群(G2,F4,E6,E7,E8)のファイブレーション系による実代数幾何的実現まで発展させた．さらに，シンプレクティック・アフィン空間のラグランジュ部分多様体の接平面ヴァライティの分類問題考察し，国内・海外において研究連絡・成果発表を行った．特に平成２５年８月末にワルシャワ（ポーランド）で開催される波日特異点研究会と，９月初めにエジンバラ（スコットランド）で開催される幾何学的特異点論研究会に参加・講演し，研究連絡・成果発表を行った．D4幾何の三対性とD型特異点論を進展させ,共著論文を執筆し，国際的学術雑誌に投稿中である．また，サブリーマン幾何との関連で，カルタン分布について共著論文を執筆し，国際的学術雑誌に投稿し既に出版予定である．また，その論文のサーベイ論文を執筆し，国際的学術雑誌に投稿している．

5．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　6　件）

①
G. Ishikawa, Y. Kitagawa, W. Yukuno, Duality of singular paths for (2,3,5)-distributions, to appear in Journal of Dynamical and Control Systems. 査読有. 掲載確定.
DOI: 10.1007/s10883-014-9216-9

②
Goo Ishikawa, Tangent varieties and openings of map-germs, RIMS Kokyuroku Bessatsu, B38 (2013), 119--137. 査読有.
http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu-j.html

③Goo Ishikawa, Singularities of tangent varieties to curves and surfaces, Journal of Singularities, 6 (2012), 54--83. 査読有.
DOI: 10.5427/jsing.2012.6f

④Goo Ishikawa, Classification problems on singularities of mappings and their applications, Sugaku, Volume 64--1 (2012), 75-96. (In Japanese). 査読有.
http://mathsoc.jp/publication/sugaku/

⑤Goo Ishikawa, Generic bifurcations of framed curves in a space form and their envelopes, Topology and its Applications, vol.159 (2012), 492--500. 査読有.
http://www.sciencedirect.com/science/journal/01668641/159/2

⑥G. Ishikawa, Y. Machida, M. Takahashi, Asymmetry in singularities of tangent surfaces in contact-cone Legendre-null duality, Journal of Singularities, vol.3 (2011), 126--143. 査読有.
http://www.journalofsing.org/volume3/index.html

〔学会発表〕（計 11 件）

① Goo Ishikawa, Yumiko Kitagawa, Wataru Yukuno, Singular path duality for Cartan distributions from geometric control theory (in Japanese), 24 September 2013, Autumn Meeting 2013 of Mathematical Society of Japan, September 24--27, 2013, Ehime University, Ehime Japan.

② Goo Ishikawa, The D4-triality and singularities of tangent surfaces, 6 September 2013, Singularities in geometry and applications III, 2 September -- 6 September 2013, The International Centre for Mathematical Sciences (ICMS), Edinburgh, Scotland, UK.

③ Goo Ishikawa, Singular path duality for Cartan distributions from geometric control theory, 28 August 2013, Geometric Singularity Theory, 8th Polish-Japanese Singularity Theory Working Days, 24 August 2013 -- 31 August 2013, The Banach Center, IMPAN, Warsaw, Poland

④ Goo Ishikawa, Singularities of Tangent Surfaces in Cartan's Split G2-geometry, August 30, 2012, The V-th International Conference of Differential Geometry and Dynamical Systems (DGDS-2012), 29 August -- 2 September 2012, Mangalia, Romania.

⑤ Goo Ishikawa, Tangent varieties and openings of map-germs, 18 June, 2012, An international workshop in Singularity Theory, its Applications and Future Prospects celebrating jubilees of Bill Bruce and Terry Wall, 18-22 June 2012, Liverpool, UK.

⑥
Goo Ishikawa, Singularities of tangent surfaces in G2-geometric structures, June 2, 2012, Singularities and Geometric Structures, May 30 -- June 2, 2012, Lifelong Learning Center of Nagano City, Nagano, Japan.

⑦Goo Ishikawa, Openings of stable unfoldings, March 3, 2012, AMS Sectional Meeting, Special Session on Singularities, Stratifications and Their Applications, March 3 -- 4, 2012, University of Hawaii at Manoa, Honolulu, HI, USA.
⑧Goo Ishikawa, Openings of stable unfoldings, 2 Dec. 2011, RIMS workshop, Singularity theory, geometry and topology, 29 Nov. -- 2 Dec. 2011 RIMS, Kyoto, Japan.
⑨Goo Ishikawa, Openings of stable unfoldings, 24 Nov. 2011, The 4th Japanese-Australian Workshop on Real and Complex Singularities, 22--25 Nove. 2011, Kobe Satellite of Hyogo University of Teacher Education, Kobe, Japan.
⑩ Goo Ishikawa, Singularities of Tangent Varieties and Differential Systems, 3rd June, 2011 Singularity Theory and its Applications from 31st May to 3rd June, 2011, Academic Hall, Oita National College of Technology, Oita, Japan.
⑪ Goo Ishikawa, Singularities of Tangent Varieties to Curves and Surfaces, 18th May 2011. Workshop on Singularities in Geometry and Applications, from 15th May to 21th May, 2011. Stefan Banach International Mathematical Center, Bedlewo, Poland.

６．研究組織

(1)研究代表者

石川　剛郎（Ishikawa, Goo）
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号：50176161

(2)研究分担者

山口　佳三 (Yamaguchi, Keizo)
北海道大学・総長
研究者番号：00113639

泉屋　周一 (Izumiya, Shyuichi)
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号：80127422
斎藤　睦 (Saito Mutsumi)
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号： 70215565

(3)連携研究者

待田　芳徳 (Machida Yoshinori)
沼津工業高等専門学校・教養科・教授
研究者番号： 90141895

田邊　晋 (Tanabe Susumu)
熊本大学・自然科学研究科・教授
研究者番号： 90432997

齋藤　幸子 (Saito Sachiko)
北海道教育大学・旭川校・准教授
研究者番号： 40260400

高橋　雅朋 (Takahashi Masatomo)
室蘭工業大学・工学部・准教授
研究者番号： 80431302

北川　友美子 (Kitagawa Yumiko)
大分工業高等専門学校・一般科理系・准教授
研究者番号：40403323