

平成 27 年 6 月 8 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2010～2014

課題番号：22340032

研究課題名(和文)作用素環の対称性の包括的研究

研究課題名(英文)A comprehensive study of symmetries of operator algebras

研究代表者

泉 正己 (IZUMI, Masaki)

京都大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：80232362

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 13,300,000円

研究成果の概要(和文)：作用素環に関連する対称性の研究を行った。松井宏樹と共同で $C^*$ 環への離散群の作用の研究を行い、部分的ではあるが群の位相幾何学的性質と $C^*$ 環の自己同型群の位相幾何学的性質を用いて分類不変量を構成した。

Vaughan Jones, Scott Morrison, David Penneys, Emily Peters, Noah Snyder と共同で指数5以下の部分因子環の完全分類を行った。Pinhas Grossman, Noah Snyder と共同で Asaeda-Haagerup 部分因子環から構成されるフュージョン圏の Morita 同値類の構造を明らかにした。

研究成果の概要(英文)：I studied the structure of symmetries of operator algebras. With Hiroki Matui, we studied discrete group actions on  $C^*$ -algebras, and partially obtained a classification invariant by using topological properties of discrete groups and the automorphism groups of  $C^*$ -algebras.

With Vaughan Jones, Scott Morrison, David Penneys, Emily Peters, Noah Snyder, we completely classified subfactors of index less than or equal to 5. With Pinhas Grossman and Noah Snyder, we gave detailed description of the structure of the Morita equivalence class of the fusion categories arising from the Asaeda-Haagerup subfactors.

研究分野：作用素環論

キーワード：函数解析 作用素環 群作用

1. 研究開始当初の背景

(1) Hilbert 空間の有界作用素から成る共役演算に関して閉じた代数で、ノルム位相に関して閉じたものを  $C^*$ -環、弱作用素位相に関して閉じたものを von Neumann 環と呼ぶ。作用素環とはこれらの総称である。可換な作用素環の構造定理から、 $C^*$ -環は位相空間の、von Neumann 環は測度空間のそれぞれ非可換版とみなされる。作用素環は典型的な無限次元の数学的对象として伝統的には函数解析学の一分野として研究されてきたが、無限自由度の量子系の記述や非可換幾何学の理論を展開するための場としても盛んに研究されている。その構造の解析は、作用素環論ではもとより、それを道具あるいは言語として使う分野でも、重要な関心事である。作用素環への群作用の研究は、次に述べる二つの理由により 1960 年代以降、作用素環論の中心的研究課題の一つとなっており、当研究も作用素環におけるこの古典的テーマの延長線上にある。

量子論において、観測可能量は Hilbert 空間上の自己共役作用素により記述される。そのため必然的に、物理系の対称性は作用素のなす環の自己同型写像や反自己同型写像として記述される。作用素環論による量子場の理論や量子統計力学の数学的定式化は 1960 年代に行われたが、上記の理由により、それ以来多くの数理論理学者が作用素環上の群作用の研究に参入し、作用素環的観点から見ても重要な成果をもたらしている。また近年においては、低次元のモデルに関連して量子群などのより一般的な代数系による対称性の記述も重要性を増している。

Connes は 1970 年代に単射的因子環の分類に着手し、 $III_1$  型の場合を除いて分類を完成させた。因子環とは中心がスカラーのみである von Neumann 環であり、一般の von Neumann 環の基本的構成要素である。彼の分類理論の最も大きな特徴は、環の分類をある特定の環上の整数群の作用の分類に帰着するところにある。このことは、環の構造を理解する上で自己同型群の構造がいかに重要かを物語っており、実際このような例は枚挙に暇がない。単射的因子環の分類は、1980 年代後半に Haagerup により完成されたが、これは  $II$  型因子環への実数群の作用についての問題の解決と同値であった。Connes の研究はその後、Jones, Ocneanu, 竹崎, Sutherland, 河東, 片山により完成された単射的因子環への離散従順群の作用の分類理論の研究に受け継がれた。

これら作用素環のいわば古典的テーマは、思想的には本研究が直接関係する Jones の部分因子環の理論や Elliott の従順  $C^*$ -環の分類理論などの現代的テーマに受け継がれている。

(2) Jones は 1980 年代初頭に  $II_1$  型因子環の部分因子環の指数を導入し、部分因子環の研究に着手した。彼の理論は作用素環のガロワ

理論とも言えるものであるが、Galois 群に相当するものは群よりも広い或る種のテンソル圏である。彼の理論から結び目の多項式不変量である Jones 多項式が発見され、数理論理学や低次元トポロジーの多くの研究が触発されたことは有名である。1990 年代に研究代表者を含む多くの人々の研究により指数 4 以下の部分因子環の完全な分類が行われた。しかし指数が 4 より大きい場合、Haagerup や浅枝による数個の例が構成されているのみであった。これらの例は当初散在的なものと思われていたが、申請者は 2001 年の論文で Cuntz 環を用いた部分因子環組織的構成法を提唱していた。

(3) Elliott は 1970 年代半ばに有限次元  $C^*$ -環の帰納極限である AF-環の  $K$ -理論による分類を行った。1990 年代に入り再び Elliott が AT 環の分類理論を発表して以来、従順  $C^*$ -環の  $K$ -理論による分類理論は爆発的な発展を遂げた。中でも特筆すべきは、Kirchberg と Phillips による Kirchberg 環の  $K$ -理論による完全な分類である。また Kirchberg 環とは対極にある安定有限  $C^*$ -環の分類理論も 1990 年代後半より H. Lin 等の一連の結果により発展を遂げ、2010 年頃には最終的局面を迎えつつあった。これらの分類理論も思想的には上述の単射的因子環の分類理論に大きな影響を受けている。岸本は 1990 年代後半から分類可能な  $C^*$ -環への群作用の研究に着手し、Rohlin 性を持つ作用の分類の基礎を与えた。中村は岸本の方法に従い整数群  $Z$  の Kirchberg 環への外部的作用に成功した。申請者は、有限群の作用で Rohlin 性を持つものが分類可能であることを示していた。

(4)  $E_0$  半群の研究は 1980 年代に Powers と Arveson により創始された。可分無限次元 Hilbert 空間の有界作用素全体のなす環の、単位元を保つ連続 1 径数自己準同型半群を  $E_0$  半群という。 $E_0$  半群の組織的研究は 1980 年代後半に Powers と Arveson によって始められたが、Hilbert 空間の連続テンソル積分解や、確率論において Tsirelson の導入したノイズの概念と  $E_0$  半群の関係が近年明らかになってきている。申請者は以前の研究で、Tsirelson が off white noise から構成した  $III$  型  $E_0$  半群の例を、正準交換関係の表現を使うことによっても構成できることを示し、さらに R. Srinivasan との共同研究で、Tsirelson の不変量では互いに区別できない非可算無限個の  $III$  型  $E_0$  半群の例を構成していた。

(5) 研究代表者は以前の研究で非可換マルコフ作用素のポワソン境界の概念を導入し、コンパクト量子群の無限テンソル積作用の解析への応用を行った。この概念は様々な状況で応用されることが、多くの研究により明らかになってきていた。

2. 研究の目的

(1) 当研究の目的は、群、量子群、半群、さ

らにはテンソル圏などの代数系の作用素環への作用の解析を通して、作用素環の構造を明らかにすることである。部分因子環の分類は作用素環の構造を明らかにすると同時に新たなテンソル圏の構成に繋がる。C\*-環への群作用の K-理論による完全分類を行えば、未知の作用を具体的なモデルを用いて解析することが可能となる。また非可換調和解析的及び非可換確率論的な方法により von Neumann 環の研究を行うのも目的の一つである。より具体的には、上記の各話題について次の問題を考察することを目的とした。

#### (2) 部分因子環とテンソル圏の分類。

1990 年代の研究で指数 4 以下の部分因子環の分類が完成した。それらは Dynkin 図形で記述される。その後の研究で、対応するテンソル圏は量子群や共形場理論にも表れる標準的なものであることが明らかになった。一方指数が 4 と 5 の間にある部分因子環の例は少数しか知られておらず、これらに対応するテンソル圏は他では見られないものである。4 以上の指数の比較的小さな部分因子環の分類を進め、新たなテンソル圏の発見をすることは、本研究の目的の一つである。

#### (3) C\*-環への群作用の研究。

1. で述べたように離散従順群の単射的因子環への作用の分類は既に完成している。一方 C\*-環への群作用の分類の研究には K-理論的な障害がありその進展は著しく遅れている。外部的作用に限っても、研究開始現時点で完全に分類されていたのは Kirchberg 環への整数群  $Z$  の作用のみであった。申請者は以前の研究で、有限群の Kirchberg 環への作用が、K-理論的にはほとんど制御不可能に見えるほど多様であることを示した。一方で、Rohlin の性質を持つものに限れば K-理論により分類可能であることも示した。前者は有限群の位相幾何学的な複雑さの反映であり、また後者は位相幾何学的な障害が消えている特別な場合であると推察できる。そこで次の予想を提唱するに至った。“その分類空間が有限次元であるような可算従順群の Kirchberg 環への外部的作用は K-理論的な不変量により分類可能である”。有限群の分類空間は有限次元にはなりえないため、予想の適用範囲から除外されている。この予想をより広いクラスの群に対して示すことは研究目的の一つである。

#### (4) $E_0$ 半群の研究。

調和解析および作用素論的方法により、正準交換関係や正準反交換関係から構成される  $E_0$  半群を構成し、その分類不変量を計算することは本研究の目的の一つである。

#### (5) 非可換ポワッソン境界の研究。

非可換ポワッソン境界の定義には Choi-Effros 積を用いるが、それには超積を用いた超越的議論を用いる。この定義を見直し、非可換ポワッソン境界の新たな記述を行う。これが実現できれば、ポワッソン境界のより具体的記述が可能になると期待できる。

### 3. 研究の方法

(1) 部分因子環と対応するテンソル圏を分類するため、研究代表者を以前導入した Cuntz 代数の方法を精密化が必要である。そのためには最近のフュージョン圏に関する研究成果をふまえた融合的手法が必要である。これを具体例に適用するため計算機を用いた計算も行う。

(2) “その分類空間が有限次元であるような可算従順群の Kirchberg 環への外部的作用は K-理論的な不変量により分類可能である”という予想を解決するために最初に着手すべきは  $Z^n$  の作用の分類である。本研究を遂行するには、まず位相幾何学的な洞察により分類不変量を特定し、次に超積などを用いた解析的議論によりその不変量が完全であることを示す必要がある。そのため自己同型群の位相的情報を KK 理論を用いて記述する。

(3) 調和解析的方法により Toeplitz 作用素の表象を解析し、正準交換関係や正準反交換関係の準自由状態を使って新たな III 型  $E_0$  半群の構成をする。

(4) 離散群上の酔歩に対応するマルコフ作用素のダイレーションの具体的記述を用いて、Cuntz 代数を用いた非可換ポワッソン境界の新たな記述を行う。

### 4. 研究成果

(1) Vaughan Jones, Scott Morrison, Noah Snyder と共同で指数が 4 と 5 の間にある部分因子環の完全分類を行い、Haagerup 部分因子環、Asaeda-Haagerup 部分因子環、extended Haagerup 部分因子環、GHJ 因子環、Izumi-Xu 部分因子環のみが存在することを示した。さらに指数 5 の因子環の分類を行い、それらが有限群と指数 5 の部分群の対で与えられることを示した。

(2) 千葉大学の松井宏樹教授と共同で Kirchberg 環への群作用に関する上述の予想に取り組み、poly- $Z$  群と呼ばれるクラスの群の外部的作用の研究を行なった。Poly- $Z$  群のクラスは格子群  $Z^n$  や離散 Heisenberg 群、それにはより一般にねじれない有限生成冪零群や単連結可解 Lie 群の余コンパクト格子を含む重要なクラスである。現在のところ予想が証明できる可能性のある最大のクラスと思われる。まず準備として、Kirchberg 環の連続漸近中心化環の K 群の研究を行いその KK 理論による記述を得た。これを用いて K 群を係数とする群コホモロジーに値を取る分類不変量を得た。群の Hirsch 階数が低い場合には、これが完全不変量となる。

(3) R. Srinivasan と共同で正準交換関係や正準反交換関係の準自由状態を使った新たな  $E_0$  半群の構成法を与えた。これらの構成法では 2 点函数を与える作用素が Toeplitz 作用素になり、その表象の正則性が構成された  $E_0$  半群を特徴付ける。

(4) ダイレーション理論を使った Arveson に

よる非可換ポワソン境界の特徴付けを用いて Choi-Effros 積の新たな記述を得た。さらに離散群の酔歩に対応するマルコフ作用素の場合にダイレーションの具体的記述を使って、非可換ポワソン境界を与える Cuntz 代数の状態を記述した。この状態は、Cuntz 状態と呼ばれる純粋状態を、離散群の双対であるコンパクト量子群の作用で平均して得られるものであり、今後非可換ポワソン境界の解析に役立つと期待される。(5)榎本拓実と共同で、単純 AF 環のコニタリ群など、作用素環に付随する無限次元 Lie 群の指標を決定した。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 9 件)

Masaki Izumi, Vaughan Jones, Scott Morrison, Noah Snyder, Subfactors of index less than 5, part 3: quadruple points, 査読あり, Communications in Mathematical Physics, Vol.316, No.2, 2012, 531-554.

Masaki Izumi, Pavle Goldstein, Quasi-free actions of finite groups on the Cuntz algebra  $O_n$ , 査読あり, Tohoku Mathematical Journal, (2) Vol.63, No.4, 2011, 729-749.

Masaki Izumi, R. Srinivasan, Toeplitz CAR flows and type I factorizations, 査読あり, Kyoto Journal of Mathematics, Vol.50, No.1, 2010, 1-32.

Masaki Izumi, Hiroki Matui,  $Z^2$ -actions on Kirchberg algebras, 査読あり, Advances in Mathematics, Vol. 224, No.2, 2010, 355-400.

[学会発表](計 21 件)

Masaki Izumi, Near group categories and their relatives: Cuntz algebra approach, Sunfactors, CFT, and VOA, May 2-8, 2014, Nashville (USA).

Masaki Izumi, The classification of  $3^n$  subfactors with odd  $n$ , Subfactors and Fusion Categories, April 14, 2014, Banff (Canada).

Masaki Izumi, Group actions on Kirchberg algebras, Mathematics and Quantum Physics, July 8-12, 2013, Rome (Italy).

Masaki Izumi, Poly- $Z$  group actions on Kirchberg algebras,  $C^*$ -algebras, Dynamics, and Classification, October 28-November 3, 2012, Oberwolfach (Germany).

Masaki Izumi, The classification of certain fusion categories and subfactors I, II, Quantum Probabilistic Symmetries. September 4-5, 2012, Aberystwyth (UK).

Masaki Izumi, Group actions on operator algebras, London Mathematical Society Midland Regional Meeting, September 3, 2012, Aberystwyth (UK).

Masaki Izumi, Goldman's type results for subfactors revisited, III factors: rigidity, symmetries and classification, May 26, 2011, Paris (France).

Masaki Izumi, Group actions on operator algebras, International Congress of Mathematicians, August 20, 2010, Hyderabad (India).

Masaki Izumi, Noncommutative Poisson boundaries, International Conference of Quantum Probability and Related Topics, August 15, 2010, Bangalore (India).

Masaki Izumi, The Toeplitz CAR flows, Satellite Conference on Operator Algebras, August 13, 2010, Chennai (India).

Masaki Izumi, Classification of group actions on Kirchberg algebras, The Special Week on Operator Algebras, June 21-25, 2010, 上海(中国).

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

泉 正己 (IZUMI, Masako)  
京都大学大学・院理学研究科・教授  
研究者番号: 80232362

### (3) 連携研究者

河東 泰之 (KAWAHIGASHI, Yasuyuki)  
東京大学・数理科学研究科・教授  
研究者番号: 90214684

植田 好道 (UEDA, Yoshimichi)  
九州大学・数理学研究院・准教授  
研究者番号: 00314724

松井 宏樹 (MATUI, Hiroki)  
千葉大学・理学研究科・教授  
研究者番号：40345012

小澤 登高 (OZAWA, Narutaka)  
京都大学・数理解析研究所・教授  
研究者番号：60323466

岡安 類 (OKAYASU, Rui)  
大阪教育大学・教育学部・准教授  
研究者番号：70362746

戸松 玲治 (TOMATSU, Reiji)  
北海道大学・理学研究科・准教授  
研究者番号：70447366

木田 良才 (KIDA, Yoshikata)  
京都大学・理学研究科・准教授  
研究者番号：90451517

山上 滋 (YAMAGAMI, Shigeru)  
名古屋大学・多元数理科学研究科・教授  
研究者番号：90175654