

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 3 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2010～2013

課題番号：22340034

研究課題名(和文) タイヒミュラー空間論に関連した力学系と確率過程のエルゴード理論的研究

研究課題名(英文) Ergodic-theoretical study of dynamical systems and stochastic processes related to the theory of Teichmüller spaces

研究代表者

盛田 健彦 (Morita, Takehiko)

大阪大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：00192782

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 12,900,000円、(間接経費) 3,870,000円

研究成果の概要(和文)：先行研究において得られたタイヒミュラー空間のブラウン運動の候補となる拡散過程について、その推移確率密度関数が応用上重要な幾つかの不等式を満たすことを確かめることはできたが、内在的距離とタイヒミュラー距離との関係を明らかにするまでには至らなかった。一方、力学系に関係する成果としては、RVZ 誘導変換の周期軌道に対応するような写像類群の双曲元について、チェボタレフ型の密度定理の成立を示唆する結果が得られた。

研究成果の概要(英文)：For the candidate of the "Teichmüller Brownian motion" obtained in our preceding research, we show that its transition probability densities satisfy some useful inequalities. Unfortunately, we are not so successful that we can establish the explicit relation of its intrinsic metric with the Teichmüller metric. On the other hand, for the renormalized Ruzyk-Veech-Zorich induction, we obtain a result that illustrates the validity of Chebotarev type density theorem for the distribution of hyperbolic elements of the mapping class group.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：エルゴード理論 タイヒミュラー空間論 拡散過程 力学系

1. 研究開始当初の背景

(1) 複素上半平面、モジュラー群、モジュラー曲面は、それぞれ、トーラス=種数 1 の閉リーマン面のタイヒミュラー空間、写像類群、モジュラー空間とみなすことができる。この同一視による上半平面のタイヒミュラー計量はポアンカレ計量に他ならないということもよく知られている。本研究代表者がかねてから提唱している長期的な研究目標として、

「モジュラー曲面に関する既存の結果において、複素上半平面を種数  $g \geq 2$  の閉リーマンのタイヒミュラー空間に、モジュラー群を種数  $g \geq 2$  の閉曲面の写像類群に、モジュラー曲面を種数  $g \geq 2$  の閉リーマン面のモジュラー空間にそれぞれ置き換えた場合に、どのような類似、あるいは、変化が生ずるかということを確認し、種数 1 の場合と種数 2 以上の場合を対応付ける辞書を作成させる」

というものがあつた。これまでもタイヒミュラー計量から自然に定まる力学系と拡散過程の大域的・エルゴード理論的挙動の関連性に重点を置くことによって、以下に挙げる種数 1 の場合に確認されている事実 ①~③が、種数 2 以上の場合に如何なる形で現れるかを明確にすることについては継続的に試行錯誤を行ってきた。

① モジュラー曲面の長さスペクトル、すなわち、ポアンカレ計量に関する測地流の閉軌道の長さスペクトルの情報は、セルバーグゼータ関数の解析的性質で完全に決定されており、セルバーグゼータ関数の解析には、熱核に関するセルバーグの跡公式が有効である。(H. P. McKean, *Commun. Pure Appl. Math.* 25 (1972) 225-246)。

② 上半平面のポアンカレ計量に関するラプラス・ベルトラミ作用素から、その熱核を推移確率密度とする拡散過程 (= 双曲ブラウン運動) が定義される。したがって、セルバーグゼータ関数等を確率論的に解析することが可能である。

③ 上半平面の自然な境界 (実軸と無限遠点の合併) は、双曲ブラウン運動や測地的ランダムウォークに関するポテンシャル論的なコンパクト化による理想境界になっている。さらに、モジュラー群の上半平面への作用は境界まで連続に拡張され、境界上では連分数変換と呼ばれる離散力学系の作用と軌道同値である (R. Bowen and C. Series, *Publ. IHS* 50 (1979) 153-170, *C. Series, Israel J. Math* 44 (1983) 221-242)。

ここに列挙した項目を含む辞書作成の実現可能性を示唆する結果として、1970 年代後

半の W. Thurston による写像類群の分類 (A. Fathi, F. Laudenbach and V. Poenaru, *Asterisque* 66-67 (1979)) と、1980 年代の中ごろの H. Masur (*Proc. AMS* 94 (1985) 455-459) や、W. Veech (*Ann. Math* 124 (1986) 441-530) 等によるタイヒミュラー測地流の研究がある。本研究代表者は 1986 年ごろに、これらの結果を目にしたとき、モジュラー群 (種数 1) と写像類群 (種数 2 以上) の元の分類、および、ポアンカレ計量に関する測地流 (種数 1) とタイヒミュラー計量に関する測地流 (種数 2 以上) が果たす役割は極めて酷似しており、現在目標としている辞書の一部が既に存在していることを知った。それを機に上述の項目 ①~③ を含む幾つかの項目についての辞書の完成という着想に至った。

(2) 本研究実施以前に代表者自身が既に得ていたこの方面の成果としては、連分数変換の対応物として、繰込まれた RVZ 誘導変換を採用することによって、タイヒミュラー測地流の閉軌道の長さスペクトルに関する素数定理型定理を証明していたことが挙げられる (T. Morita, *Contemp. Math.* 484 (2009) 135-151)。これは、まだ完全な類似とはいえないにしてもモジュラー曲面における閉測地線定理に対応する結果である。

一方、上記 ①~③ にあるようなタイヒミュラー空間上のブラウン運動を利用した確率解析研究にも着手したが、当初想定していなかった問題に直面した。というのは、タイヒミュラー計量の滑らかさが不十分であることが大きな障害となって、標準的な拡散過程を構成するという問題自体が、かなり挑戦的な課題であること判明したからである。そのためこの方面での研究は一時暗礁に乗り上げていた。ようやく本研究課題申請のころになって、ディリクレ形式による手法 (例えば、K. T. Sturm, *Ann. of Prob.* 25 (1998) 1-55) を用いて標準的ブラウン運動と思しき拡散過程の構成が現実的なものとなってきた。これによって、標準的ブラウン運動を予め構成し、その推移確率密度関数の性質を調べるといった接近法に再び期待が持てるようになった。

2. 研究の目的

本研究では、写像類群そのものや古典力学系の研究者よりむしろ、確率論、エルゴード理論、離散群、複素力学系、タイヒミュラー空間論のエキスパートからなる研究組織を組み、次の 3 つの目標に関する研究を実施したいと考えた。

(1) 既に構成されている拡散過程 (以下、簡単のため T-ブラウン運動という) の熱核について、ナッシュ型の評価 (ガウス核との比較) が成り立つか? タイヒミュラー距離に関してのヘルダー連続性はあるか? 写像

類群不変性をもつか？ タイヒミュラー距離を内在的距離とするか？ といったブラウン運動の熱核と呼ぶにふさわしい性質を備えているかどうかの検証を行う。

(2) T-ブラウン運動によるタイヒミュラー空間のコンパクト化によって得られた境界とサーストーン境界との関係、および、その境界における T-ブラウン運動の調和測度とタイヒミュラー測地流の不変測度との関係を、写像類群の作用のエルゴード理論的挙動を通して明らかにする。

(3) T-ブラウン運動の熱核のセルバーグ型ゼータ関数への応用を試みて、転送作用素の方法との比較を行う。可能ならば有効な跡公式があるかどうかにも着手し将来の研究につなげる。

### 3. 研究の方法

(1) 研究目的に掲げた3つの目標 2-(1)、2-(2)、2-(3) をこの順で達成すべく、項目ごとに必要になると予想される幾つかの工程に分けて、初年度は、2-(1)を遂行し、平行して本研究の主要部である研究目標 2-(2)に向けた準備を行い、平成 23 年度より本格的に 2-(2)に着手する。研究の進捗状況が良好な場合にはこれをその後の研究期間における最優先課題とし、平成 23 年度以降の進捗状況によっては、研究目標 2-(3)の一部を割愛することもあり得るという方針で研究を遂行した。研究期間内に連携研究者と協力して研究集会を、年に1回程度開催し、本研究と関係する国内外のあらゆる分野の研究者と交流し情報交換および最新成果の発表を行う計画とした。なお、代表者において研究組織内に、確率論グループ、タイヒミュラーグループ、力学系グループ、エルゴード理論グループ、ゼータ関数グループといったワーキンググループを編成したが、研究の遂行自体は研究組織構成員の自由な研究活動を前提としており、構成員を研究上過剰に拘束するものではない。代表者を除く研究組織構成員の研究のパフォーマンスが下ることのないように、研究分担者・連携研究者が各人固有の研究を推進しながら参画できるようなものという観点から、研究分担者のエフォートについても 5% 程度とした。

(2) 平成 22 年度:初年度は研究目的で目標としてあげた項目 3-(1) の検証に重点をおいて研究を進めた。:

① 既に得られているタイヒミュラー空間上の拡散過程の構成法について、セミナー等を行って、組織内で共通の理解を得ておく。

② 本研究代表者による拡散過程の構成法は、基本となるラドン測度(参照測度)ごとに拡散過程を構成するというもので、得られた拡

散過程がタイヒミュラー空間の標準的ブラウン運動にふさわしいものであるためには、参照測度を適切に選ぶ必要がある。Masur と Veech が 2 次微分のモジュライ空間上に構成したタイヒミュラー測地流の不変測度をタイヒミュラー空間に制限した測度をに注目した。

③ 次に 3-(1)-②で採用した測度が測度縮小性(measure contraction property)をもつこと示した。ここまでの作業が完結すれば簡単議論で、ナッシュ型の評価や、熱核のヘルダー連続性を導くことが出来る。

④ 以上の研究と平行して、平成 23 年度以降の研究 2-(2) に向けての準備も進めておくとともに、研究集会を開催して情報交換を年度末に実施する予定であったが、諸般お事情で次年度に繰り越しとせざるを得なくなった。

(3) 平成 23 年度、平成 24 年度:本研究の主要部分である研究項目 2-(2) の研究を本格的に開始する。この部分を遂行するには 2 年から 3 年は必要であると想定はしており、研究遂行中に 3 年は必要と判断した場合には、項目 2-(3) に掲げた研究より 2-(2) の継続を優先することにしていった。2-(2) についての具体的な工程は以下のようなものであった。

① T-ブラウン運動によるタイヒミュラー空間のマルチンコンパクト化を実行する。

② ①で得られたタイヒミュラー空間の境界上での写像類群の作用の連続性について調査。推移性、エルゴード性に加えて、タイヒミュラー測地流の境界挙動についても考察する。

③ タイヒミュラー空間のサーストーン境界と、他のコンパクト化の境界の関係を明らかにする。②の段階で写像類群の作用が不連続であることが判明していれば、両者は異なる境界であることがわかる。その場合は、可測作用のレベルではどうなっているかを調べることになる。H. Masur and V. A. Kaimanovich, Invent. math. 125 (1996) 221-264 で得られている写像類群に値をとるランダムウォークのポアソン境界に関する結果が参考になると思われる。

④ ③と平行して純粋に力学系の観点からタイヒミュラー空間のパターソン・サリバン測度、あるいはボーエン・マルグリリス測度にあたる測度の構成を行い、T-ブラウン運動の調和測度との関係を明らかにする。F. Ledrappier, Israel J Math. 71 (1990) 275-287 にある負曲率コンパクト多様体の普遍被覆におけるボーエン・マルグリリス測度

と双曲ブラウン運動の調和測度を関連付けた研究が参考になるとと思われる。

以上のような手順を想定していたが、タイヒミュラー測地流をタイヒミュラー空間の余接バンドル全体で考えた場合の取り扱いがモジュラー曲面の余接空間の場合とは比較にならないくらい複雑なため作業は難航した。そこで、議論を簡単にするため M. Kontsevich and A. Zorich, *Invent. Math.* 153 (2003) 631-678 を利用して、Veech によって導入された zippered rectangle のモジュラー空間上の、Veech flow を考えることとした。その場合、写像類群全体を考えるのではなく Rauzy 誘導変換の作用を考えることになり、若干議論を単純化することができる。その方向への転換の有無については、研究の進捗状況を検討し判断する。

(3) 平成 23 年度に懸案として残ったタイヒミュラー計量に付随したブラウン運動(T-ブラウン運動)の確率解析的接近法における拡散係数の滑らかさに関する難点についての解消には想定以上の時間を要した。また、平成 22 年度の研究で得られていた T-ブラウン運動の内在的距離とタイヒミュラー距離の一致に関する結果の証明に新たな難点が見つかったことから、目標 2-(3) の一部については今後の課題として残すこととなった。

#### 4. 研究成果

(1) 平成 22 年度 :

① 確率過程に関連する部分では、タイヒミュラー空間上ブラウン運動の候補となる拡散過程の熱核が、ナッシュ型の評価(ガウス核との比較)と、タイヒミュラー距離に関するヘルダー連続性をもつことについては 1990 年代の Sturm の結果を用いることによって検証することができた。

② 力学系に関連する部分では、必ずしも当初の計画通りというわけにはいかなかったものの、以前から推進して来たタイヒミュラー測地流の閉軌道分布の研究のエルゴード理論的接近法の改良については若干の進展を見た。具体的には、ある種の繰込みを施した Rauzy-Veech-Zorich の誘導変換の力学系ゼータ関数は絶対収束域を超えて有理型にかつ零点をもたない解析接続をもつことが知られているが、更にこれを精密化して、ある正の数  $\delta$  を十分小さくとるとことにより、実部が  $1-\delta$  より大きいような半平面における有理型解析接続については、零点のみならず極についても 1 以外の極が存在しないようにも解析接続されることを確認できた。この結果は京都大学数理解析研究所で開催された国際研究集会「Number Theory and Probability」における招待講演「Dynamical zeta functions for a class of renormalized RVZ inductions」で報告した。

(2) 平成 23 年度 :

① 本研究の雛形とも言える有限生成第 1 種フックス群に付随したリーマン面の測地流とボーエン・シリーズ写像についての考察によって、本研究遂行のための手法の開発に努めた。その過程において有限生成第 1 種フックス群のユニタリ表現を考えたときのセルバーグゼータ関数に対して、本研究代表者が過去に行なった解析接続と転送作用素によるフレッドホルム行列表現についての成果の改良を得ることができた。具体的には、ヒルベルト空間に値をとる解析関数の空間に作用する複素パラメータをもつ表現付き転送作用素の族を導入し、その絶対値 1 の固有値の存在条件を調べた。

② ①の転送作用素の族のフレッドホルム行列式でセルバーグゼータ関数を表現することによってその解析的性質の幾つかを証明し、チェボタレフ型の密度定理の別証明について再考を行なった。この結果のタイヒミュラー空間における類似については、写像類群の双曲元で RVZ 誘導変換で表現できるクラスについては、セルバーグ型ゼータ関数に関する解析が素数型定理とその剰余項の粗い評価を得る程度までは検証可能であるが、未だ写像類群の表現を考慮するまでには至っていない。以上に関して得られた結果については 2011 年 6 月京都大学数理解析研究所で開催された研究集会 : Geometric and analytic approaches to representations of a group and representation spaces および 2012 年 2 月 鹿児島大学理学部で開催された研究集会 : 第 7 回鹿児島代数・解析・幾何セミナーにおける招待講演で発表した。

(3) 平成 24 年度 :

① 平成 23 年度に懸案として残った T-ブラウン運動の確率解析的接近法における拡散係数の滑らかさに関する難点については、ディリクレ形式による方法の導入によって解消することができた。平成 22 年度の研究で得られていた T-ブラウン運動の内在的距離とタイヒミュラー距離の一致に関する結果の証明に新たに不十分な点があることが判明したが、両者が同等の位相を定めるということは影響を与えないため、この結果が弱まったとしても本研究全体には大きな影響を与えないことを確認した。むしろ内在的距離に関する理解が深まったという点で得るものは大きかったと考えている。

② 本研究の確率論に関する技術的な副産物として、準コンパクトな転送作用をもつ非特異変換に対するポアソンの少数法則の関数解析的接近法を開発し、2012 年 12 月 4 日から 12 月 7 日に日本女子大学で開催された国際研究集会「Ergodic Theory and Metric Number Theory」における講演「Poisson limit

law for a class of dynamical systems with quasi-compact transfer operators」の中で発表した。

(4) 平成 25 年度 :

① T-ブラウン運動の内在的距離とタイヒミュラー距離の大域的な関係については今年度も未解決のままであった。しかしながら、タイヒミュラー空間の種々のコンパクト化とその境界のポテンシャル論を視野に入れた研究については、研究分担者の宮地氏により新しい知見が得られ、今後も本研究の方向性を保った研究の必要であるという認識に至った。具体的には、タイヒミュラー空間の元を双曲距計量のホモトピー類と捉え、閉曲線のホモトピー類の空間上の汎関数と見なすことによって得られたコンパクト化がサー斯顿コンパクト化であった。宮地氏は、以前よりタイヒミュラー空間の元が閉曲線のホモトピー類にその極値的長さを対応させる汎関数と見なすことによって得られるガーディナー・メイザーコンパクト化に注目し、これらのコンパクト化によって得られたタイヒミュラー空間の境界について詳細なる比較を行ってきた。サー斯顿境界は、ガーディナー・メイザー境界の真部分集合であることはガーディナーとメイザーによって示されていたが、宮地氏は *Math. Z* 誌に掲載が決定している論文 *Unification of the extremal length geometry on Teichmüller space via intersection number* において、幾何学的交点数を概念的に拡張して極値的長さも含め統一的に扱うことができること証明した他、ガーディナー・メイザー境界がポテンシャル論の対象としてはより自然であることを示唆するいくつか成果を得ている。

② 本研究の確率論的な部分の技術的な副産物としては代表者が 30 年前に行ったランダム力学系に関する研究を発展させたいくつかの成果を得て、2014 年 2 月数理解析研究所において開催された研究集会「ランダム力学系理論とその応用」での招待講演「Asymptotic behavior of one-dimensional random dynamical systems - a revisit」で発表した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 37 件)

① H. Miyachi, Unification of extremal length geometry on Teichmüller space via intersection number, *Math. Z.* 掲載決定、査読有り

② H. Miyachi, Extremal length boundary of Teichmüller space contains no Busemann

points, *Trans. Amer. Math. Soc.* 掲載決定、査読有り

③ H. Sumi, Dynamics of postcritically bounded polynomial semigroup II, *J. London Math. Soc.* Vol. 88, No. 1, (2013), pp. 294-318, 査読有り  
DOI: 10.1112/jlms/jdt017

④ H. Sumi, Cooperation principle, stability and bifurcation in random complex dynamics, *Adv. Math.* Vol. 245, (2013), pp. 137-181 査読有り  
DOI:org/10.1016/j.aim2013.05.023

⑤ T. Morita and Y. Tokunaga, Measures with maximum total exponent and generic properties of  $C1$  expanding maps  
*Hiroshima Math. J.* Vol. 43, No. 3, (2013), pp. 351-370, 査読有り  
URL:http://projecteuclid.org/euclid.hmj/1389102580

⑥ H. Sumi and M. Urbanski, Bowen parameter and Hausdorff dimension for expanding rational semigroups, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* Vol. 32, No. 7, (2012), pp. 2591-2606 査読有り  
DOI:10.3934/dcds.2012.32.2591

⑦ H. Miyachi and S. Dragomir, Uniform weak\*-topology and earthquakes in the hyperbolic plane, *Proc. London Math. Soc.* Vol. 105, No. 6, (2012), pp. 1123-1148, 査読有り  
DOI:10.1112/plms/pds026

⑧ K. Ohshika, Realising end invariants by limits of minimally parabolic, geometrically finite groups, *Geom. Topol.* Vol. 15, No. 2, (2011), pp. 827-890 査読有り  
DOI: 10.2140/gt.2011.15.827

⑨ H. Sumi, Measures and dimensions of Julia sets of semi-hyperbolic rational semigroups, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* Vol. 30, No. 1, (2011), pp. 313-363, 査読有り  
DOI: 10.3934/dcds.2011.30.313

⑩ H. Miyachi and H. Shiga, Holonomies and the slope inequality of Lefschetz fibrations, *Proc. Amer. Math. Soc.* Vol. 139, No. 4, (2011), pp. 1299-1307, 査読有り  
DOI: 10.1090/S0002-9939-2010-10563-4

⑪ H. Miyachi and K. Ohshika, Uniform model for the closure of the Riley slice, *Contemp. Math.* Vol. 510 (2010), pp. 249-306

査読有り

DOI: <http://dx.doi.org/10.1090/conm/510>

⑫ H. Sumi, Dynamics of postcritically bounded polynomial semigroups III, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* Vol. 30, No. 6, (2010), pp. 1869–1902, 査読有り  
DOI:10.1017/S0143385709000923

⑬ H. Sumi and M. Urbanski, Real analyticity of Hausdorff dimension for expanding rational semigroups, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* Vol. 30, No. 2, (2010), pp. 601–633, 査読有り  
DOI:10.1017/S0143385709000297

[学会発表] (計 13 件)

① 盛田 健彦, Asymptotic behavior of one-dimensional random dynamical systems—a revisit, 「ランダム力学系の理論とその応用」 2014 年 2 月 19 日、京都大学数理解析研究所

② H. Miyachi, Geometry on Teichmüller space via extremal length, 「The XXIIth Rolf Nevanlinna Colloquium」 2013 年 8 月 6 日, University of Helsinki

③ T. Morita, Poisson limit law for a class of dynamical systems with quasi-compact transfer operators, 「Ergodic Theory and Metric Number Theory」 2012 年 12 月 4 日, 日本女子大学新泉山館

④ T. Morita, Generalizations of the continued fraction transformation and the Selberg zeta functions, 「Geometric and analytic approaches to representations of a group and representation spaces」 2011 年 6 月 24 日, 京都大学数理解析研究所

⑤ T. Morita, The thermodynamic formalism approach to Selberg zeta functions for co-finite Fuchsian groups, 「The 7th Kagoshima Algebra-Analysis-Geometry Seminar」 2012 年 2 月 15 日, 鹿児島大学理学部

⑥ T. Morita, Dynamical zeta functions for a class of renormalized RVZ inductions, 「Number Theory and Probability」 2010 年 9 月 14 日, 京都大学数理解析研究所

[図書] (計 1 件)

① H. Sugita, Monte Carlo method, random number, and pseudorandom number, *Mathematical Society of Japan*, 2011, 133 pages

[その他]

ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

盛田 健彦 (MORITA Takehiko)  
大阪大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号: 00192782

### (2) 研究分担者

杉田 洋 (SUGITA Hiroshi)  
大阪大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号: 50192125

大鹿 健一 (OHSHIKA Ken'ichi)  
大阪大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号: 70183225

角 大輝 (SUMI Hiroki)  
大阪大学・大学院理学研究科・准教授  
研究者番号: 40313324

宮地 秀樹 (MIYACHI Hideki)  
大阪大学・大学院理学研究科・准教授  
研究者番号: 40385480

磯崎 泰樹 (ISOZAKI Yasuki)  
京都市芸繊維大学・大学院工芸科学研究科・准教授  
研究者番号: 90273573  
(平成 23 年度より連携研究者)

### (3) 連携研究者

仲田 均 (NAKADA Hitoshi)  
慶應義塾大学・理工学部・教授  
研究者番号: 40118980

由利 美智子 (YURI Michiko)  
北海道大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号: 70174836

辻井 正人 (TSUJII Masato)  
九州大学・大学院数理学研究科・教授  
研究者番号: 20251598

須川 敏幸 (SUGAWA Toshiyuki)  
東北大学・大学院情報科学研究科・教授  
研究者番号: 30235858