

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 29 日現在

機関番号：22604

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2013

課題番号：22510153

研究課題名(和文)非線形な資産価格付け理論に関する研究

研究課題名(英文)Research on non-linear pricing of assets

研究代表者

田中 敬一(Tanaka, Keiichi)

首都大学東京・社会(科)学研究科・教授

研究者番号：00381442

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円、(間接経費) 840,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、非線形な価格付けを行う資産価格理論の構築を目指した。非線形の資産評価は、曖昧さの回避の概念と関連するので、回避したい曖昧さの一種類として、レジームスイッチの推移確率を取り挙げた。経済環境の状態を表す状態変数を規定するパラメータがレジームスイッチする状況における意思決定の問題を無限満期の枠組みで解明した。また、短期金利が、複数の金利モデル間でレジームスイッチする場合の債券価格やデリバティブ価格を検討し、その価格の導出に成功した。

研究成果の概要(英文)：We conducted a research on non-linear asset pricing models. A non-linear pricing is related to an idea of aversion to uncertainty. We focused on the uncertainty of regime switching intensities to avoid. An investor's decision problem under an environment with regime switching parameters in infinite time horizon has been solved. We also studied pricing models under which the dynamics of the short interest rates is regime switched among several models. We obtained the prices of zero-coupon bond and other contingent claims under the model.

研究分野：複合新領域

科研費の分科・細目：社会・安全システム科学 社会システム工学・安全システム

キーワード：ファイナンス

## 1. 研究開始当初の背景

多くの資産価格理論では一物一価を仮定するので、価格付け汎関数は線形となる。理論の発展段階では線形性の仮定は妥当であり、計算上都合も良い。しかしながら、流動性に乏しい非完備市場の場合では、価格が取引数量に依存したり、ポートフォリオ内の証券が特定の種類に偏在すると、追加的な取引の貢献度が低下するために取引に応じることができる価格が変化し、等、現実の価格付けは最早線形性を保っていない。

非線形価格としては価値尺度(monetary utility)と無差別価格(indifference price)による評価が知られている。ここで、価値尺度とは、リスク尺度に-1を乗じて符号を転じたものである。リスク尺度に関しては、Value at Risk に代表されるリスク管理指標の一つとして Artzner et al.(1999), Delbaen (2002) 等によりその性質が解明され理論が発展してきた。多くの文献は1期間のみの静学的な設定における考察であったが、多期間の動学的な場合も考察が始まり、Peng (1997)等の後向き微分方程式の解として定義される非線形な期待値オペレーターによって評価する手法も開発されている。価値尺度による評価はこれらのリスク尺度による評価に他ならないので、結果をそのまま援用できる。無差別価格は非完備市場における価格付けの一つとして注目されているが、指数効用(CARA型)の場合にはエントロピー(確率測度間の距離の概念の一つ)を通して価値尺度の特殊な場合と一致することが知られている。

フォンノイマンの期待効用理論の公理には、完備性、推移性、連続性、単調性に加え、独立性(independence, 2つのくじに別の同じ不確実なくじを一定確率で加えても順序が維持される性質)がある。曖昧さ回避では独立性の仮定が確実独立性(certainty-independence, 2つのくじに別の同じ確実なくじを一定確率で加えても順序が維持される性質)に緩和されている。この確実独立性から曖昧さ回避(uncertainty aversion, 確率が曖昧である状態を回避する性質)が導かれ、複数の確率測度から最悪な期待値を与える測度を選択して意思決定することに帰着する。リスク測度から導かれた価値尺度は、別の公理体系(単調性、貨幣不変性、凸性)をもって構成されるが、曖昧さ回避の性質を持つ。すなわち、価値尺度は曖昧さ回避と完全な包含関係にあるわけではないが、多くの性質を共有し、価値尺度がより強い含意を示唆することが多い。その差異は、貨幣単位で表示される価値尺度である効用水準の数値が絶対的な意味を成すことに起因する(期待効用理論や曖昧さ回避では効用水準は相対的な意味しか成さない)。

近年の金融市場で観察される市場参加者の行動を説明するべく、非線形な価格付けを

行う資産価格理論を構築し、派生証券等のヘッジ戦略やリスク管理手法を考察する研究が必要であると考えた。一層の理論発展のためには、非線形な価格付け汎関数の研究が学術的にも金融市場における実務的な立場からも重要であろう。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、非線形な価格付けを行う資産価格理論を構築することを目指す。リスク尺度を用いた非線形の資産評価は、曖昧さの回避の概念と関連する。回避したい曖昧さの一種類として、レジームスイッチの推移確率を取り挙げる。

レジームスイッチングは、株式収益率のように背景の経済や市場全体の状況によって、トレンドや変動幅が大きく異なる状態の変化である。考えられる状態としては、経済状態の良し悪し、株式市場全体の価格変動のトレンド、ボラティリティの高低(ボラティリティ・クラスタリング)等が挙げられる。そのようなレジームスイッチングの状況下において証券を価格付けする場合には、その推移確率を設定したうえで求めることになるが、元来、推移確率は未知であり、曖昧さが含まれる。その曖昧さ回避により非線形価格となることが予想される。しかるに、レジームスイッチング状況下における証券価格付けや意思決定理論は十分に整備されていない状況であるため、この点を改善する研究を行う。具体的には下記の2点である。

(1) 収益変動を表すパラメータがレジームスイッチングする状況下における投資の意思決定の問題

リアルオプションによる議論の拡張である。投資のための条件を規定するパラメータが一定ではなく、レジームスイッチする設定を考察することにより、より現実の問題に近い設定となる。

(2) 短期金利のモデルがレジームスイッチする場合の債券価格およびデリバティブ取引価格の導出

名目金利、実質金利、もしくは主観的割引率について、レジームスイッチを伴う短期金利としてモデル化する。

## 3. 研究の方法

(1) 投資意思決定問題はリアルオプションの枠組みで議論する。経済環境の状態を表す状態変数を規定するパラメータがレジームスイッチする状況における意思決定の問題を無限満期・連続時間・ブラウン運動による確率的変動の枠組みで考察する。

(2) モデル化する金利の対象として名目金利, 実質金利, もしくは主観的割引率が考えられる. 将来得られる効用やキャッシュフローを割り引く主観的割引率は一定と仮定する既存研究が多いが, 主観的割引率自体も確率的に変動しうる. また, その確率的な変動も景気動向やイベントなどによって突発的に変化しうる. これらのことを勘案して主観的確率がレジームスイッチする金利モデルに従うと仮定して, そのレジームスイッチリスクの曖昧さを回避するモデルを検討する. 金利モデルにおけるレジームスイッチには, 金利水準とそのモデルが変化する場合と, 金利の変動を表す方程式の形態やパラメータが変化する場合の 2 種類が考えられるが, 両者について考察する.

#### 4. 研究成果

(1) 経済環境の状態を表す状態変数を規定するパラメータがレジームスイッチする状況における意思決定の問題を無限満期の枠組みで解明した. 課題は, 最適化の条件から導出される, 閾値の区間毎に異なる連立 2 階常微分方程式の解法である. 連立 1 階常微分方程式に変換することにより, 順次解くことが可能であることが判明し, その具体的手順を提示した. また, 初到達時刻に関する期待値計算がしばしば必要となるので, その計算をディリクレ問題(ある領域の境界上の条件を与えられた時にその領域上で微分方程式を満たす解の探索の問題)に帰着させてその解を得た. これらの結果の一部については既存研究で明らかにされているが, 簡単なアイデアで普遍的に導出できるよう手法を解明したことは大いに意義があると言える.

(2) 金利変動モデルがレジームスイッチすると仮定して, そのレジームスイッチリスクの曖昧さを回避するモデルを検討した. 短期金利が, 複数の金利モデル間でレジームスイッチする場合の債券価格やデリバティブ価格を検討し, その価格の導出に成功した. 金利の変動過程がレジームスイッチする場合に加えて, 金利の水準とともにモデルがレジームスイッチする場合でも対応できる. その導出には, Feynman-Kac 公式と homotopy perturbation method を応用した. 既存研究においてもオプション価格等の導出があったが, その表現には各状態で留まる時間幅 occupational time が用いられている. したがって実際の計算には occupational time の分布が必要であるにも関わらず, その分布は明示されていない. 本研究において homotopy perturbation を用いることにより, occupational time の分布計算を行うことなくデリバティブ価格の計算が可能となった. その展開式は, レジームスイッチの回数に基づく価格評価と解釈できる.

#### 5. 主な発表論文等 (研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 4 件)

Tanaka, K., First Passage Time in Real Options 京都大学数理解析研究所講究録, 1818, 17-32, 2013, 査読無

Nagashima, K., Chung, T.K., Tanaka, K., Asymptotic Expansion Formula of Option Prices under Multifactor Heston Model 首都大学東京 経営学専攻 Research Paper Series, 121, 1-40, 2013, 査読無

Tanaka, K., Irreversible Investment with Regime Switching: Revisit with Linear Algebra, 首都大学東京 経営学専攻 Research Paper Series, 105, 1-38, 2012, 査読無

Tanaka, K., Yamada, T. and Watanabe, T., Applications of Gram-Charlier expansion and bond moments for pricing of interest rates and credit risk, Quantitative Finance, 10(6), 645-662, 2010, 査読有

[学会発表](計 10 件)

Tanaka, K., Bond Pricing under Regime Switching Among Several Short Rate Models, 2013 年度確率モデルシンポジウム, 2014 年 1 月 24 日, 東京理科大学

Tanaka, K., Bond Pricing under Regime Switching Among Several Short Rate Models, JAFEE 2013 冬季大会, 2014 年 1 月 11 日, 慶應義塾大学

Tanaka, K., Irreversible Regime Switching in Real Option, RIMS Workshop on Financial Modeling and Analysis 2012 年 9 月 18 日, 京都大学

Tanaka, K., Irreversible Investment with Regime Switching: Revisit with Linear Algebra, Annual International Real Options Conference, 2012 年 7 月 27 日, ロンドン

Tanaka, K., Irreversible Investment with Regime Switching: Revisit with Linear Algebra, SIAM Conference on Financial Mathematics & Engineering (FM12), 2012 年 7 月 9 日, ミネアポリス

Tanaka, K., Regime Switching in Real Option, Bachelier Finance Society, 2012 年 6 月 19 日, シドニー

Tanaka, K., Irreversible Investment under Regime Switching, Actuarial and Financial Mathematics, 2012 年 2 月 9 日, ブラッセル

Tanaka,K., Irreversible Investment under Regime Switching, Quantitative Methods in Finance 2011, 2011年12月16日, シドニー

Tanaka,K., Regime Switching in Real Option, RIMS 研究集会「不確実・不確定環境下における数理的意思決定とその周辺」2011年11月9日, 京都大学

Tanaka,K., Irreversible Investment under Regime Switching, 2011年度 OR 学会秋季研究発表会 2011年9月16日, 甲南大学

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

田中 敬一 (TANAKA, Keiichi)

首都大学東京・社会(科)学研究科・教授

研究者番号: 00381442