

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 6月 5日現在

機関番号：13601

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2012

課題番号：22530960

研究課題名（和文） 証明のよみに焦点をあてた証明カリキュラムのデザイン

研究課題名（英文） Curriculum design for reflecting on proofs and proving in mathematics education

研究代表者

茅野 公穂 (CHINO KIMIHO)

信州大学・教育学部・准教授

研究者番号：20400658

研究成果の概要（和文）：

本研究は、学校数学のカリキュラムにおいて、子どもたちが証明を構想・構成することの充実と共に、証明をよんだり証明することをふりかえったりすることも充実するように、証明カリキュラムをデザインするための枠組みを構築した。枠組みは、意図的・計画的な学習指導を念頭に階層性を備えるとともに、各階層には証明することをふりかえるために必要な具体的な活動が位置付けられている。

研究成果の概要（英文）：

This research has constructed a preliminary framework for curriculum design, which will enrich students' not only planning and constructing proofs but also reflecting on proofs and proving. In order to achieve intentional and planned guidance of students' learning activities, the framework is equipped with the hierarchy matching required activities for reflecting on proofs and proving.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011年度	800,000	240,000	1,040,000
2012年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総計	2,600,000	780,000	3,380,000

研究分野：数学教育

科研費の分科・細目：教育学・教科教育学

キーワード：学校数学, 証明, カリキュラム

1. 研究開始当初の背景

学校数学において証明の学習は重視されてきた。さらに、数学的活動が重視されるようになり、学習の対象は、証明することへと広げられてきている。しかし、生徒の「証明のよみ」も含め、証明あるいは証明すること

の学習状況の課題が指摘されていた。学習とその指導については、改善ための不断の努力が続けられているもののさらなる改善の必要であるとともに、思考力、判断力、表現力などの獲得と言語活動の充実という今日的課題からみても、学習とその指導の質的改善

が必要であった。

改善のための不断の努力が続けられているものの、従来の研究等では、カリキュラムデザインのための理論的枠組みの構築と共有が課題となっていた。我が国において、証明のカリキュラム開発のための枠組みばかりでなく、証明研究全般に渡って理論的枠組みが希薄であることが指摘されていた。また、国際的な研究動向においても、学習者の視点からの学年・学校段階を一貫した学習環境のデザインのための基礎研究が進展していた。

もちろん、証明カリキュラムのデザインは従来も取り組まれていた。しかし、「証明の構成」に焦点をあてたものとなりがちであった。証明の本性を生徒が認識できるようにするために、証明カリキュラムのデザインに際して、「証明の構成」と「証明のよみ」が両輪となるように位置づけることが必要であると考える。本研究は、子どもたちの学習に関するデータはまだ十分に得られていない「証明のよみ」に焦点をあて、証明カリキュラムのデザインのための枠組みを構築することにした。

2. 研究の目的

本研究の目的は、学校数学における、「証明のよみ」を強化した証明カリキュラムをデザインするための理論的枠組みを構築することである。

3. 研究の方法

研究目的を達成するために、本研究では、以下の2点からアプローチした。

(1) 子どもたちの学習活動についての「証明のよみ」に焦点をあてた分析

まず、証明すること(proving)に関わる先行研究のレビューを行い、証明すること(proving)における「証明のよみ」の位置づけを明確にする。

次に、先行研究等の知見にもとづき「証明のよみ」に関する教授実験をデザインし、子どもたちの「証明のよみ」の学習に関するデータを収集し、証明することをふりかえる側面で必要な活動を吟味し、特定することにした。

(2) 「証明のよみ」を強化した証明カリキュラムをデザインするための理論的枠組の構築

活動の目的、方法等を分析の視点として、「証明のよみ」を強化した証明カリキュラムをデザインするための理論的枠組を構築する。また、この枠組みに基づいて教材の開発や指導法の開発を行い、ある単元の授業を構想し、実際の授業データに基づいて、枠組み等の修正を行う。

4. 研究成果

(1) 子どもたちの学習活動についての「証明のよみ」に焦点をあてた分析に関する成果
①証明すること(proving)における「証明のよみ」の位置づけ

証明することに関しては、先行研究を踏まえ、大きく3つの側面「事柄を生成する」、「証明を生成する」、それらの結果や過程を「ふりかえる」から捉える(図1)こととした(Chino et al., 2010)。これらの側面のうち、証明をよむことが頻繁に行われるのは証明することをふりかえる側面である。

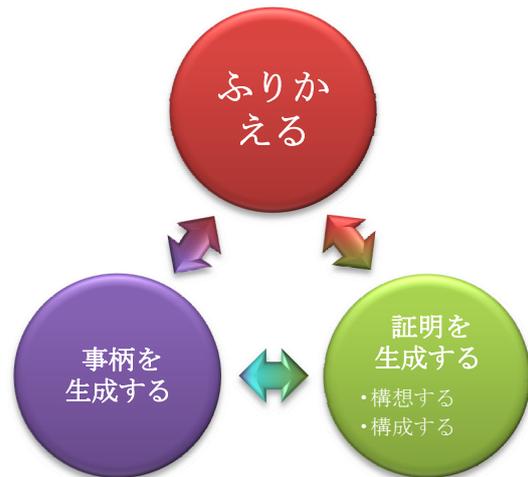


図1 証明することの側面

各側面で必要な活動について研究が進められているものの、ふりかえる側面については十分議論されているとは言い難い。ふりかえる側面については、哲学(反省的思考, Dewey, 1933 など)、心理学、数学教育学(数学的な問題解決の文脈でのふりかえる, Polya, 1957 など)において既に議論されてきたが、証明ことに限定し議論する必要がある。そこで、本研究では、先行研究等の知見にもとづき「証明のよみ」に関する教授実験をデザインし、子どもたちの「証明のよみ」の学習に関するデータを収集し、証明することをふりかえる側面で必要な活動を吟味することにした。

②証明することをふりかえる側面で必要な活動の特定

子どもたちの「証明のよみ」の学習に関する本研究でのデータは、大きく3つある。一つは、中学校第2学年の生徒が、平行四辺形の性質を証明し、その証明を構成する際に立てた方針や証明を振り返り、証明してわかったことをまとめる学習である。二つめは、中学校第3学年の生徒が、円周角の定理について、ある図に即した表現を用いて証明したことを基に、状況を変えて別の図で表される場面の証明を構成する際に以前立てた方針やもとの証明を振り返り、新たに証明してわか

ったことをまとめる学習である。三つめは、中学校第2学年の文字を用いた式で、数について成り立つ事柄を証明する学習である。

これらのデータから、証明をよむ際に、何のために何をどのように用いるのかを自覚しているか否かが活動の進展や充実に重要であることがわかり、これらの方法知を顕在化するようなあらたな教授実験を考案することになった。例えば、文字を用いた式で、数について成り立つ事柄を証明する場面では、以下の少なくとも十種の活動が必要であることを明らかにした。証明を構想する過程でのむだや誤謬を除くための二つの活動として、(a1)事柄の主部を文字を用いた式で表現するために用いたものとその用い方を探り、事柄の主部を文字を用いた式で(再)表現すること、(a2)事柄の述部に対応する式変形の目標をどのように設定したのかを探ること。証明そのもののむだや誤謬を除くための三つの活動として、(b1)事柄の主部が文字を用いた式で表されているか確かめること、(b2)式を適切に変形すること、(b3)事柄の述部が式変形の結果として表されているか確かめること。証明の用い方に関してむだや誤謬を除き、証明することをさらに進めるための五つの活動として、(c1)文字を用いた式で表現されたものから事柄の主部を解釈すること、(c2)式変形の結果について、部分や全体は何を表しているか解釈すること、(c3)証明の適用範囲を探ること、(c4)見いだした事柄を的確に表現すること、(c5)複数の事柄を整理すること。これらによって、証明することをふりかえる側面で学習すべき内容が顕在的になる。

(2) 「証明のよみ」を強化した証明カリキュラムをデザインするための理論的枠組の構築

証明することをふりかえる側面で必要な活動を実現すべく、そのための意図的・計画的な証明のよみに焦点をあてたカリキュラムデザインのために、これらの活動を目的-手段の関係で階層化することにした。証明することをふりかえる側面で必要な活動は、以下の3つの層に階層化される(図2)。

一つは、採用した表現体系内での説明・証明の推論を対象に、その適否を判断することである。上述の(b1)、(b2)、(b3)がこれに該当する。図形の性質を対象とする証明の場合において、推論の根拠を指摘したり、推論の根拠が不適切であると見抜いたり、循環論を見抜いたりすることなどが該当する。

二つめは、上述の採用した表現体系内での説明・証明の推論が適切であることを基に、事柄と説明・証明との対応を対象に、その対応をより適切なものとするものである。上述の(a1)、(a2)、(c1)、(c2)、(c3)、(c4)が

これに該当する。(a1)、(a2)は、事柄の正しさを説明・証明するために採用した表現体系への持ち込み方に関わり、(c1)、(c2)は、ある表現体系で表されたものを事象に即して解釈することに関わる。さらに、これらを踏まえて(c4)は、事柄を簡潔に、明瞭に、さらに的確に表現することに関わり、(c3)は、そのようにして表現された事柄と証明との対応を保障することに関わる。これらは、図形の性質を対象とする証明の場合においても同様である。

最後に、事柄と証明との適切な対応を基に、状況と(説明・証明を伴った)複数の事柄との対応を対象とするものである。本研究において、子どもたちが説明・証明を構想する際、(a1)についての誤謬を修正した結果として、当初とは別の新たな事柄を証明を伴って生成することが事例として見いだされている。当初、説明・証明しようとしていた事柄を表現できていないという判断に留まるのではなく、ある表現体系で表されたものを事象に即して解釈することで新たな事柄を生成することを視野に入れて子どもたちの学習指導を展開することは、自律的な学習の基盤を培う観点からも重要である。

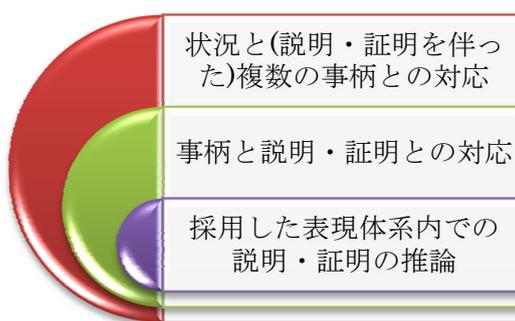


図2 「証明のよみ」の階層性

以上のように、「証明のよみ」を強化した証明カリキュラムデザインのための枠組みは、階層性(採用した表現体系内での説明・証明の推論を対象に、その適否を判断することからはじまり、事柄と説明・証明との対応を対象に、その対応をより適切なものとする、そして、状況と複数の事柄との対応を対象に、よりよく整理することへと質的向上が意図されている)を備えている。また、各階層は、証明することをふりかえる側面で必要な具体的な活動と対応付けられている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計1件)

- ① Chino, K., Fujita, T., Komatsu, K., Makino, T., Miyakawa, T., Miyazaki, M.,

Mizutani, N., Nakagawa, H., Otsuka, S. & Tsujiyama, Y., An assessment framework for students' abilities/competencies in proving, Proceedings of the 5th East Asia Regional Conference on Mathematics Education (EARCOME5), Vol. 2, 416-423, 2010, 査読無.

〔学会発表〕(計4件)

- ①茅野公穂, 学校数学における証明することの学習に関する研究: 証明することをふりかえる側面で必要な活動に焦点をあてて, 日本数学教育学会 第45回数学教育論文発表会, 2012.11.10, 奈良教育大学.
- ②Kimiho Chino, Reflecting on geometrical proofs: What do students produce by reflecting on a proof?, The 12th International Congress on Mathematical Education, 2012.7.8-15, COEX, Seoul, Korea.
- ③茅野公穂, 学校数学における証明や証明することをどう捉えるか, 日本科学教育学会 第35回年会, 2011.8.23, 東京工業大学.
- ④茅野公穂, 学校数学での理由の説明・証明を捉える枠組み, 日本科学教育学会 第34回年会, 2010.9.11, 広島大学.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

茅野 公穂 (CHINO KIMIHO)
信州大学・教育学部・准教授
研究者番号: 20400658

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし