

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 31 日現在

機関番号：13801

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2010～2012

課題番号：22530961

研究課題名（和文） 発見し証明する過程を重視した幾何教育に関する研究

研究課題名（英文） A Study on Teaching Geometry with an Emphasis on Learning Process to discover the property and then prove it

研究代表者

國宗 進（KUNIMUNE SUSUMU）

静岡大学・教育学部・教授

研究者番号：50214979

研究成果の概要（和文）：幾何教育において「何を発見するのか」「何を証明するのか」を明らかにし、生徒の現状として後者に問題があることを文献調査と授業研究によって明らかにした。その改善には「発見し証明する過程を重視する」ことが重要であり、その実現のための具体的な展開事例を多々示した。また、幾何教育に関する日英の協同研究を通して、特に「数学的な定義」「数学的な表現」「教師による指導の形態」の3点が重要であることを提案した。

研究成果の概要（英文）：We researched the characteristics of students' understanding about mathematical proof and proving based on literature and lessons in lower secondary schools. We indicated it is important for the students to learn geometry through the process to discover the property and then prove it, and have made many lesson plans that students learn through these processes. Moreover, cooperated with researchers in UK, we identified focus on issues of mathematical definitions, mathematical representations, and the form of instruction used by teachers.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2011年度	900,000	270,000	1,170,000
2012年度	800,000	240,000	1,040,000
総計	3,100,000	930,000	4,030,000

研究分野：数学教育学

科研費の分科・細目：教育学・教科教育学

キーワード：数学教育，幾何教育，証明，授業

### 1. 研究開始当初の背景

幾何教育の重視は、近年の世界的な傾向である。例えば、イギリスでは国家カリキュラムにおいて幾何学における推論が取り上げられ、アメリカ合衆国では幾何教育を代数指導とともに重視することが連邦レベルでも叫ばれている（國宗進「最近のイギリスの数学教育」『日本数学教育学会誌』83巻10号，2001年；國宗進「アメリカ合衆国における幾何と代数の協調」『静岡大学教育学部研究報

告（教科教育篇）』第33号，2002年。）。そこには、特に「証明・説明」能力の育成という点で、幾何教育が果たす役割に対する期待が現れている。

幾何教育におけるユークリッド流の証明は、その生産物に価値があるというよりも、そこで行われる数学的推論が多くの子ども達にとって重要であるという主張が一層強くなっていて、今日、幾何教育における帰納的、実験的、発見的な取り扱いの重要性は、

共通の信念になっているということが出来る。

ところで、欧米での算数・数学カリキュラムに関する議論は、例えば方程式や図形の性質等の数学概念の理解と共に、「問題解決、コミュニケーション、数学的推論」等の能力育成に関しても明示的に行われるのが通常である。日本においても近年、数学的リテラシーに関する研究とも相まって「算数・数学で育成すべき能力」に関する研究が行われるようになってきている。

本研究は、数学的推論能力の育成に大きく関わる「図形の証明」に焦点を当て、能力育成の点で先ずるイギリスの幾何教育も参照しながら、我が国の幾何教育の一層の充実を目指す。なお、イギリスでは1989年に国家カリキュラムが導入されて以降、日本と共通点が多い幾何教育の実現が計画・実施されている。

特に中学校での幾何教育においては、授業の展開が、生徒の学習への興味・関心や達成度に強く影響を与えるとされている。本研究は、国内外における大規模調査の結果によって改善の必要性が強く指摘されている、「学習の過程」をよりの確なものにする一つの方策を示すことにもなる。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、算数・数学科における「証明・説明」に関する児童・生徒の理解の様相を明らかにし、「証明・説明」する能力の育成を重視した幾何教育について理論的・実証的に明らかにするとともに、ある性質や方法を「発見し証明する過程」を重視した授業を実現するための具体的方策を提案することである。

## 3. 研究の方法

(1) 中学校数学科での図形教育に関して、「発見し証明する過程」に関する生徒の理解の様相を、全国学力・学習状況調査や現行数学教科書の分析、そして授業研究を通して、明らかにする。

(2) イギリスの国家カリキュラムにおける「証明・説明」に関する指導内容をまとめ、日本とイギリスにおける証明に関する授業、特に「発見し証明する過程」を重視した授業について授業研究を通して分析・検討する。そして、日本及びイギリスの幾何教育が目指している方向性の異同を明確にする。

(3) 上記(1)、(2)で明らかになったことを総合的に考察し、「証明・説明」する能力の育成を重視した幾何教育の系統を明らかにするとともに、性質や方法を「発見し証明する過程」を重視した授業を実現するための具体的方策を提案する。

## 4. 研究成果

(1) 「発見し証明する過程」を重視した授業に関する基本的な考え方

性質を発見しその証明を考えるという学習指導は、特に生徒の数学への関心・意欲の喚起、及び好ましい数学学習観の形成に欠かせない。

ブルーナーは「幾何学に対してよい直観力をもっている生徒、つまり、提示された証明の妥当性を単に検査したり、記憶したりするのではなく、証明を発見することに優れた生徒を育てるという点にさらに多くの注意をはらう必要のあることがくりかえし指摘されてきている。」(1963)と、特に証明の発見を強調している。本研究では、証明法の発見にとどまらず、性質やその結論あるいは仮定の発見も視野に入れている。

まず図形に関する学習指導における「発見し証明する過程」を検討し、授業展開を構想する上での基本的な考え方を明らかにした。

「発見し証明する」学習の過程については、「何を発見するのか」「何を証明するのか」の観点から以下のようにまとめた。

### ①何を発見するのか

見いだす対象としては、次が考えられる。  
ア、図だけ・場面だけが与えられていて命題を見いだす

イ、仮定が与えられていて結論を見いだす

ウ、結論が与えられていて仮定を見いだす

エ、命題を一般化する等によって、より発展的な命題を見いだす

イは、いわゆる決定問題を取り上げることであり、(いくつかの)図を的確にかくことが結論の発見につながる。ウについては、ある条件を満たす作図の方法をいろいろと考え、その方法が正しいことを証明する学習指導がこれに相当する。エについては清宮の論文(1967)に詳しい考察がある。

これらのいずれにおいても、証明のための図が与えられているかどうかは、生徒の学習行動に大きな影響を与える。

### ②証明方法の発見

生徒が自力で証明方法を見いだすことができる場合には、多様な証明方法を授業で取り上げてそれを楽しむ。その際には、補助線の引き方への着眼も有用である。

また、例えば直角三角形の合同条件(斜辺と他の一辺)やピタゴラスの定理の逆の証明など、生徒自らが証明の方法を考えつのが無理なものについては、教師の誘導を中心としながらも、適宜生徒の手にゆだねるように展開を工夫する。

(2) 「発見し証明する」という学習過程に関連する現状把握

—教育課程実施状況調査等の結果から—

平成13年度、15年度の教育課程実施状況

調査, 17年度の特定の課題に関する調査, 19年度からの全国学力・学習状況調査における「発見し証明する」ことに関連する図形の問題を分析し, 生徒の理解の現状を概括的に把握した。

分析は, 「何を発見するか」そして「何を証明するか」の2つの観点から行った。

「何を発見するか, 見いだすか」に関しては, 事実や問題解決の説明に必要な事柄を見いだす, 数量・図形の性質や関係を見いだす, 解決のための方針や方法を見いだす, 新たな問題や事柄を見いだす, という観点から, 「何を証明するか, 説明するか」に関しては, 見いだした事柄の説明, 調べる方法や手順の説明, 判断の理由の説明, 成り立つ理由や図形の性質の証明, 示された方針にそった説明, という観点を設定し, 分析した。

調査結果からは, 「発見する, 見いだす」ことに比べて, 「証明する, 説明する」という点に問題点があることが明らかになった。また, 長い文章での問題場面を把握して回答するという, 通常の授業では扱われないペーパーテストによる結果ではあるものの, 無答率の高さが目につく。

### (3) 「発見し証明する過程」を重視した授業研究

中学校第2学年での「図形の合同」, 第3学年での「図形の相似」に関する授業研究を, 「発見し証明する過程」を重視して行い, 生徒の思考の様相や学習問題の適否について検討した。そこでは生徒の意欲的な追究活動が観察された。

特に第2学年の合同条件の利用の授業を通して, 生徒に与える問題の提示の仕方によって発見する内容が異なってくることを, 具体的に示した。

図形の相似の利用に関する実験授業では, 協同研究者である Keith Jones 氏 (サウザンプトン大学), Taro Fujita 氏 (プリマス大学) の参加も得て, 与える図やその向きの問題, 性質の利用の場面での教師の働きかけの問題等, 協同研究を進めるうえでの視点が明確になった。この授業研究によって, 日英の数学授業の実際に関する比較研究を一層深めることができた。

さらにまた, 中学校の複数学年において「空間図形」の学習指導に関する授業研究を, 立方体を1つの平面で切ることができる立体に関して行った。切断してできた立体を作成し思考を通して切断面の図形の形を確定するという展開によって, 作った立体の一部である切断面の形の不具合さに気づき, そこから生徒の追究が論理的に考えていこうとする方向へと進んでいく等, 課題追究に関する生徒の思考の様相を明らかにした。

### (4) 日英の幾何教育の現状比較

Keith Jones 氏, Taro Fujita 氏と日英両国の数学授業についての観察や協議に基づいて, 今後の幾何教育に関する研究課題の焦点化を図った。そして, それらを2012年7月に開催された第12回数学教育世界会議(ICME12)において, また第36回数学教育心理学会(PME36)において発表・提案した。ここでは特に我々は, 幾何教育に関する数ある論点の中で, 「数学的な定義」「数学的な表現」「教師による指導の形態」の3点が特に重要であると主張している。これらの論点には, 重なりや相互作用があるのは勿論である。

そしてまた, これらの点に関して幾何学の実践・研究を展開する機会を設け, 国際的な調査を進めていくことの意義についても指摘した。適切な理論と実践を踏まえたよく練られた研究を行うことが, 次の段階の研究である。

### (5) 「発見し証明する過程」による授業事例の集積

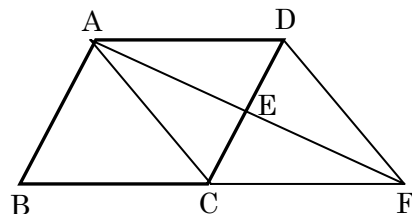
図形の学習指導において扱われる性質等に関して, 「発見し証明する過程」をとるように構想した授業展開事例を, 研究協力者の協力を得て多々集積した。以下はその一例である。

これは, 「平行四辺形であるための条件」の利用として扱うことを意図している。

・本時のねらい

平行四辺形であるための条件を使って, 図形の性質を調べる。

数学的推論能力を伸ばす。



・[問題]の提示 ← 結論を隠す

上の図の平行四辺形 ABCD で, DC の中点を E とする。AE の延長と BC の延長との交点を F とすると, どのようなことがいえそうですか。またそのことを確かめてみよう。

・発見から証明へ[性質を発見し証明する]

① いろいろな性質を予想する。

<予想例> ・四角形 ACFD は平行四辺形

・  $AC=DF$  ・  $AC \parallel DF$  ・  $AE=EF$

・  $\angle ACD = \angle FDC$  など

② 予想が正しいかどうかを検証する。

・四角形 ACFD が平行四辺形であるための条件を利用して証明する。

・  $\triangle AED \equiv \triangle FEC$  を証明する。

③ (元の図形を, 台形にして同じことを考える。) ←発展させる。

<引用・参考文献>

清宮俊雄 (1967), 「初等幾何学における発見的研究法について」『数学教育学論究』 Vol. X III, pp. 16-45.

ブルーナー (1961), 鈴木祥蔵・佐藤三郎訳『教育の過程』, 1963 訳刊行, 岩波書店

5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 10 件)

① Jones, K., Fujita, T. & Kunimune, S., Representations and reasoning in 3-D geometry in lower secondary school. *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 2, 2012, pp.339-346. Taiwan: PME. 査読有.

② Jones, K., Fujita, T., & Kunimune, S., Promoting Productive Reasoning in the Teaching of Geometry in Lower Secondary School: Towards A Future Research Agenda. *Proceedings of the 12<sup>th</sup> International Congress on Mathematical Education*, 2012, pp. 2222-2231. Korea: ICME. 査読有.

③ 近藤裕・國宗進・熊倉啓之・八田弘恵・望月美樹, 空間図形についての理解に関する研究—空間図形における2直線のなす角度に関する授業を通して—, 日本数学教育学会第45回数学教育論文発表会論文集, 2012, pp. 593-598. 査読有.

④ 坂本健司・高橋達也・國宗進, 数学的推論能力の育成を重視した中1での学習指導—説明する活動を重視して—, 静岡大学教育学部教育実践総合センター紀要, No. 20, 2012, pp. 1-10. 査読有

⑤ Fujita T., Jones K., Kunimune S., Kumakura H. and Matsumoto S., Proofs and Refutations in Lower Secondary School Geometry. *Proceeding of 7<sup>th</sup> Conference of European Research in Mathematics Education*. 2011, Poland: CERME. 査読有.

⑥ 近藤裕・國宗進・熊倉啓之・八田弘恵・望月美樹, 空間図形についての理解に関する研究—立体の切り口の授業を通して—, 日本数学教育学会第44回数学教育論文発表会論文集, 2011, pp. 489-494. 査読有.

⑦ 國宗進, イギリスの高等学校数学教科書, 日本数学教育学会誌数学教育, 第93巻第7号, 2011, pp. 39-42. 査読無.

⑧ Fujita T., Jones K., and Kunimune S., Students' Geometrical Construction and Proving Activities: A Case of Cognitive Unity? *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*,

Vol. 3, 2010, pp.9-16. Brazil: PME. 査読有.

⑨ 近藤裕・國宗進・八田弘恵・熊倉啓之・原欣司, 空間図形についての理解に関する研究—1つの平面に着目して考えることを中心に—, 日本数学教育学会第43回数学教育論文発表会論文集, 2010, pp. 163-168. 査読有.

⑩ 國宗進, イギリスの算数・数学教科書, 日本数学教育学会誌数学教育, 第92巻第5号, 2010, pp.13-16. 査読無.

[学会発表] (計 3 件)

① Jones, K., Fujita, T. & Kunimune, S., Representations and reasoning in 3-D geometry in lower secondary school. The 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education., 2012, 7. 19. Wesley Girls High School (Taiwan), PME.

② Jones, K., Fujita, T., & Kunimune, S., Promoting Productive Reasoning in the Teaching of Geometry in Lower Secondary School: Towards A Future Research Agenda. The 12<sup>th</sup> International Congress on Mathematical Education, 2012. 7. 13. COEX (Korea), ICME.

③ Fujita T., Jones K., Kunimune S., Kumakura H. and Matsumoto S., Proofs and Refutations in Lower Secondary School Geometry. The 7<sup>th</sup> Conference of European Research in Mathematics Education. 2011, 2. 10. ジェシユフ大学 (Poland).

[図書] (計 5 件)

① 國宗進, 明治図書出版, 略案で創る中学校新数学科の授業・図形編, 2011, pp. 7-14.

② 熊倉裕之, 聖文新社, 高等学校数学教育研究会編・高等学校数学教育の展開, 2011, pp. 28-75.

③ 國宗進, 明治図書出版, 算数科教育の基礎・基本, 2011, pp. 76-85.

④ 大田春外, 日本評論社, 高校と大学をむすぶ幾何学, 2010.

⑤ 國宗進, 東洋館出版, 数学教育学研究ハンドブック, 2010, pp. 123-132.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

國宗進 (KUNIMUNE SUSUMU)

静岡大学・教育学部・教授

研究者番号: 50214979

(2) 研究分担者

熊倉啓之 (KUMAKURA HIROYUKI)

静岡大学・教育学部・教授

研究者番号: 00377706

中村 享史 (NAKAMURA TAKASHI)

山梨大学・教育人間科学部・教授

研究者番号: 70303394

大田 春外 (OTA HARUTO)  
静岡大学・教育学部・教授  
研究者番号：40126769  
山田 耕三 (YAMADA KOZO)  
静岡大学・教育学部・教授  
研究者番号：00200717

(3) 研究協力者

Johns, Keith  
サウザンプトン大学・教育学研究科・教授  
藤田 太郎 (FUJITA TARO)  
プリマス大学・教育学部・講師  
松元 新一郎 (MATSUMOTO SHINICHIRO)  
静岡大学・教育学部・准教授  
研究者番号：40447660  
近藤 裕 (KONDO YUTAKA)  
奈良教育大学・教育学部・准教授  
研究者番号：80551035  
早川 健 (HAYAKAWA KEN)  
山梨大学・教育人間科学部・准教授  
研究者番号：40585387  
八田 弘恵 (HATTA HIROE)  
渋谷教育学園幕張中・高等学校・教諭  
原 欣嗣 (HARA KINJI)  
静岡県浜松市立城北小学校・教諭  
太田 郁実 (OHOHTA IKUMI)  
静岡県藤枝市立青島中学校・教諭  
近藤 正雄 (KONDO MASAO)  
静岡県磐田市立城山中学校・教諭  
坂本 健司 (SAKAMOTO KENJI)  
静岡県牧之原市立相良中学校・教諭  
笹瀬 大輔 (SASASE DAISUKE)  
静岡県掛川市立桜が丘中学校・教諭  
望月 美樹 (MOCHIZUKI MIKI)  
山梨県甲府市立北中学校・教諭