

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 15 日現在

機関番号：13902

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2010～2012

課題番号：22530963

研究課題名（和文） 数学的問題解決における表現の役割を意識した授業デザインに関する基礎的研究

研究課題名（英文） Fundamental study on lesson design on the basis of the roles of representation in mathematical problem solving

研究代表者

山田 篤史 (YAMADA ATSUSHI)

愛知教育大学・教育学部・准教授

研究者番号：20273823

研究成果の概要（和文）：本研究は、数学的問題解決における表現や問題表象の構成・変容パターンとそれらの解決の進展に果たす役割について明らかにし、その役割を意識した授業デザインについて検討した。主要な成果は、数学的問題解決に有用な5つの汎用的表現を同定したこと、問題解決の進展に関わる3つの問題表象の変容パターンを取り上げ、特に「抽象化/具体化」については具体的な役割についても検討したこと、さらには、それらの結果を踏まえて、表現の役割を意識した授業デザインについて検討したことである。

研究成果の概要（英文）：The aims of this study was to clarify the patterns of construction/transformation of (problem) representation in mathematical problem solving, to investigate its roles in progress of problem-solving process, and to consider the methodology of lesson design on the basis of the roles. The main results were to identify five types of wide-purpose representations for mathematical problem solving, to investigate three constructional/transformational patterns of problem representation in mathematical problem solving (i.e.; construction/reconstruction, abstraction/concretization, shift), and to analyze the concrete roles of “abstraction/concretization” process of problem representation. Furthermore, a methodology of lesson design on the basis of the roles of abstraction process was considered.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2011年度	900,000	270,000	1,170,000
2012年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数学教育学

科研費の分科・細目：教育学・教科教育学

キーワード：数学的問題解決，表現，授業デザイン

### 1. 研究開始当初の背景

我が国の観点別評価の項目には「表現・処理」という項目があったが、国内の数学教育

学研究では「表現」に関連する分野に対する関心は相対的に小さかった。しかし、「表現・表象(representation)」という研究分野自体は、数学教育学における基礎的研究分野とし

て確立していた。例えば、International Group for the Psychology of Mathematics Education では、"Representations" に関する作業研究グループが 80 年代初頭から組織されてきたし、国内でも「表現・表象体系の研究」(中原,1995)などは古い伝統を持っていた。こうした基礎的研究に加えて、平成 20 年の学習指導要領改訂により「表現力の育成」が叫ばれるようになると、その研究上の関心はカリキュラムや授業の文脈を踏まえたものも増えてきた。但し、諸外国では、こうした動向は以前から進んでおり、例えば、米国の National Council of Teachers of Mathematics が提唱する算数・数学カリキュラム(NCTM, 2000)には、「数」「図形」等の内容領域に加えて、それらを横断する領域の 1 つとして「表現(representation)」が組み込まれており、実践での研究成果も徐々に蓄積されつつあるのが現状であったのである。

このように、「表現・表象」に注目が集まりつつも、この分野における我が国の研究の動向には、やや極端な傾向が見られるのも確かであった。具体的には、式やグラフ等の伝統的な形式的・規約的表記に着目した研究や自然言語による記述表現(例えば、レポートに類する記述表現)に着目した研究という、やや両極端な研究が多くを占めていたのである。しかし、例えば、数学的な問題解決という文脈では、常に、伝統的な式やグラフが表現として介在するわけではないし、その認知プロセスを記述しようとする立場からすれば、自然言語による記述表現にのみ着目すればよいというわけでもない。具体的な問題解決過程では、解決者は、式などの伝統的な表現以外の表現を構成することがしばしばであるし、式などを使うにしても、それらを具体的なイメージや操作から如何にして構成、抽象、翻訳するかが問題となるのである。さらに、我が国で一般的に行われている問題解決的な算数・数学授業の様態を考えれば、そうした表現の構成・変容や表現間の翻訳の実態、さらにはそれらの問題解決に果たす役割などを考慮して授業をデザインする方法が検討されてしかるべきでもあろう。

このように、従来、数学教育学では基礎的研究分野であった「表現・表象」に関する研究は、近年、カリキュラムや授業という実践的文脈を踏まえた研究にも領域を広げつつあった。しかし、我が国では、この分野の実践に関する伝統的な研究上の関心は、教科書に掲載される伝統的な表現や規約的表現に関わるものが多く、その研究の射程も狭いものになりがちであった。その意味で、例えば、伝統的な表現のみに研究上の関心を縛られていない表現・表象及び問題解決の基礎的研究を踏まえて、それらの実践的応用を検討することなどが期待されていたのである。

中原忠男(1995).『算数・数学教育における構成的アプローチの研究』.東京:聖文社.

NCTM(2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston,VA: NCTM.

## 2. 研究の目的

本研究の目的を端的に述べるならば、問題解決過程における「表現の役割」に焦点を当て、その具体的な役割を明らかにすると共に、その役割を意識した授業デザインの方法論とその具体例を検討することであるが、より具体的には次のようになる。

- (1) 伝統的な形式的・規約的表記(式やグラフ)及び自然言語以外で数学的問題解決に有用と目される汎用的表現を収集し、主に理論的側面からそれらの問題解決過程における役割について明らかにする。
- (2) 特定の問題群における問題解決において、解決者が与えられた問題に対してどのような表現を構成し、それらをどのように変容させるかを調査し、それらが問題解決の進展に果たす具体的な役割について明らかにする。
- (3) (2)の結果を踏まえ、問題解決の進展における表現の役割の幾つかに焦点を当て、その役割を意識した授業デザインの方法について検討すると共に、その具体例を構想する。

## 3. 研究の方法

目的(1)を達成するにあたっては、形式的・規約的表記と自然言語以外で「数学的問題解決に有用と目される汎用的表現」を文献等から収集する。基本ソースは、国内外の過去から現在に至る教科書・指導書、数学教育学及び心理学における表現・表象に関係した図書や論文とする。さらに、収集された表現の中から幾つか焦点を当てるべきものを絞り、そうした特定の表現・表象が問題解決過程に果たす役割について理論的に検討を加えることにする。

目的(2)の達成に当たっては、先に収集した表現が表出すると予想される問題群を選定し、本研究グループの過去の問題解決データや先行研究、更には新たな調査を頼りにして、解決者の問題に対しする表現の構成・変容の様相を分析し、それらが問題解決の進展に果たす具体的な役割について検討を加えることにする。

目的(3)の問題解決的な授業のデザインにおいては、問題解決過程の捉え方も問題になるため、数学的問題解決過程を捉えるモデルについて先行研究をレビューし整理しておくことにする。その上で、これまでに得られた研究知見、特に問題解決過程における表現

の構成・変容のパターンやそれらの解決の進展に果たす役割を意識した授業デザインの方法を検討し、その具体例を構想ことにする。

#### 4. 研究成果

(1) 数学的問題解決に頻繁に利用され適用範囲の広い有用な図的表現を収集するという課題の下に、Diezmann & English (2001)の研究や国内の教科書等を参照し、数学的問題解決に有用と目される汎用的な図を5つピックアップした。それら5つの図的表現は、ネットワーク、マトリクス、階層(ヒエラルキー)、部分-全体、比例数直線の5つである。また、そうした図の分類の仕方や図と数学的構造・操作との結びつきについても、問題解決指導の文脈を考慮して議論した。

これらの結果と議論の詳細については、雑誌論文⑤に掲載されている。

(2) 問題解決過程を解決者が構成する問題表象の変容過程を捉える記述的モデルにより具体的な問題解決過程を分析し、そこから示唆される解決の進展を特徴付ける問題表象の変容パターンとして、「問題表象の構成/再構成」「(心像的表象の)抽象化/具体化」「問題表象における中心的な表象(システム)のシフト」という3つのパターンを見出した。これら3つのパターンは、本研究代表者の理論的枠組を使った特定的な問題解決における認知プロセスの記述から抽出されたものであるが、そのラベルの抽象性・一般性、さらには問題解決ストラテジーとの包括的な関連性や具体的教授行為との関連性故に、「解決の進展に対する方向付け」を与えうるものであることが示された。

これらの分析及び議論の詳細については、学会発表⑤④を通じて発表されている。

(3) 問題解決の進展を特徴付ける問題表象の変容パターンの1つである「抽象化/具体化」のうち、特に「抽象化」に着目し、問題解決を進めようとする目的的活動の一環としての問題表象の抽象化が、どういった具体的目的に関連づけられ得るのかについて議論した。具体的には、問題解決の進展が伴う可能性のある認知プロセスで問題表象の抽象化が果たしうる役割について、「認知的負荷の軽減」「(形式的表記への)定式化の媒介」「類推や統合的な考え方の誘発」「類似問題の探索・考察」という3つを指摘し、各々の具体例についても議論した。また、相対的に高い蓋然性をもって成功的問題解決を導くことができるとされるこれらの機能には、その実現に際して相対的に高いハードルがあるという点も Cifarelli(1996)の研究から示唆された。

これらの分析及び議論の詳細については学会発表③を通じて発表されており、また上記の結果に「具体化」の機能に関する議論も加えたものは学会発表②を通じて発表されている。

(4) 問題解決的な授業のデザインにおいては、問題解決過程の捉え方が問題となるため、先行研究における10個の問題解決過程のモデルをレビューし、「説明体系や理論的背景」「目的的性格」「柔軟性」「構成要素/解決段階間の移行についての言及」という4つの観点から分類・整理した。特に、「目的的性格」と「柔軟性」という2つの相対的観点から、幾つかのモデルの系譜や、規範的性格の強いモデルと記述的性格の強いモデルとの対比点などについて、詳細な議論ができる可能性が示唆された。

これらの議論の詳細については、雑誌論文③に掲載されている。

(5) 表現力の育成を目指した指導について検討すべく、まずは、NCTMのStandards 2000における「表現」のスタンダードを確認し、次に、同じくプロセス・スタンダードに位置付く「問題解決」の指導の3類型を利用して、表現に関わる指導の類型を考え、そこでの指導上の留意点について議論した。ここで検討した表現指導の3類型のうち「表現による指導」と「表現についての指導」は、表現の特性上、我が国の一般的な指導ではその区別が曖昧になりがちであろうが、その指導の目的上の差異を意識することの重要性は示唆された。また、「表現を生み出す指導」に関しては、言葉や規約的表現に注目が集まりがちな我が国の実践研究において、児童・生徒の幅広い文脈におけるインフォーマルな表現の実態やそうした表現を生み出すための支援に関する研究の必要性が示唆された。

これらの議論の詳細については、雑誌論文①に掲載されている。

(6) 本研究の一連の知見と議論に基づき、小学校6年生の「場合の数」の単元の1つの授業のデザインを試みた。授業デザインを検討する際に検討すべき要素としては、(a)教材・単元、(b)数学的構造、(c)数学的構造を反映する典型表現、(d)表現指導の類型、(e)問題表象の変容パターン、(f)当該の問題表象の変容パターンに期待する機能、(g)課題変数の検討、という7つが取り上げられた。ただし、ここでは(a)の教材・単元を予め「数学的問題解決に有用と目される汎用的な図」の「階層」に焦点を当てて決めていたため、(b)(c)についてはそれに依存するものとして決定され、また、単元内での何次かも決まっていたため、(d)についてもそれなりの制

約があった。ただし、(e)～(g)については、本研究の知見を踏まえて授業デザインがなされている。具体的には、当初の問題について見通しを持つ段階と考え方を出し合う段階で表現を徐々に抽象化し [(e)の問題表象の変容パターンとしての「抽象化」のプロセスの意図的な埋め込み]、そうした新たな表現が落ちや重なりなく順列を数え上げるための簡単で便利な方法であることを理解させつつ、新たな類似問題の解決を行い小集団で説明しあう段階で、新たに生み出した「樹形図」を使って問題を再表現することを推奨し、問題のよりよい解決についての理解を深めることを狙うプロセスを組み込んだ [(f)の「認知的負荷の軽減」や「類似問題の考察」という当該表現の機能の強調]。尚、このとき、新たな類似問題については、課題変数を当初問題より難しいものにし、抽象化された表現である「樹形図」の有用性の理解が深まるように工夫もした [(g)の課題変数の検討]。

## 5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計5件)

- ① 山田篤史(2012). 「表現力の育成に関わる3つの指導について」. 愛知教育大学数学教育学会誌『イプシロン』, vol. 54, 29-36. 査読無.
- ② 井口浩・大橋博・鏡味英修・岩崎浩(2012). 「算数の授業における「まとめの型」の生起とその要因 -M教諭との授業改善の取組を事例として-」. 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 18(2), 99-114. 査読有.
- ③ 山田篤史(2011). 「数学的問題解決過程のモデルについて -問題解決的な授業のデザインに向けた予備的考察-」. 愛知教育大学数学教育学会誌『イプシロン』, vol. 53, 25-38. 査読無.  
<http://hdl.handle.net/10424/4649>
- ④ 井口浩・大橋博・岩崎浩(2011). 「算数・数学科の問題解決的な授業の質を決定する一要因 -子どもによる問題解決の目標のコントロール-」. 第44回数学教育論文発表会論文集: 第1巻, 129-134. 査読有.
- ⑤ 山田篤史(2010). 「数学的問題解決に有用と目される汎用的な図について」. 愛知教育大学数学教育学会誌『イプシロン』, vol. 52, 35-44. 査読無.  
<http://hdl.handle.net/10424/3900>

[学会発表] (計5件)

- ① 有藤茂郎・小林亜由美・岩崎浩(2013). 「授業研究が数学教師の力量形成に及ぼす効果とその要因 -M教諭との長期にわたる授業改善の取組みを通して-」. 全国数学教育学会第37回研究発表会 (Feb. 2-3, 東広島市: 広島大学教育学部).

- ② Yamada, A. (2012). The role of specific transformation process of solver's problem representation during problem solving :A case of abstraction/concretization. Presented at 36th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Jul. 18-22. Taipei, Taiwan: Wesley Girl's High School/National Taiwan Normal University).
- ③ 山田篤史(2012). 「数学的問題解決の認知プロセスにおける表現・表象の抽象化/具体化の機能について」. 全国数学教育学会第36回研究発表会 (Jun. 23-24, 岡山市: 岡山大学教育学部).
- ④ 山田篤史(2012). 「数学的問題解決の進行を特徴づける幾つかの問題表象の変容パターン」. 全国数学教育学会第35回研究発表会 (Jan. 21-22, 刈谷市: 愛知教育大学).
- ⑤ Yamada, A. (2011). Three types of transformation patterns of solver's problem representation leading to progress of problem solving. Presented at 35th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Jul. 10-15. Ankara, Turkey: Middle East Technical University).

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

山田 篤史 (YAMADA ATSUSHI)  
愛知教育大学・教育学部・准教授  
研究者番号: 20273823

### (2) 研究分担者

岩崎 浩 (IWASAKI HIROSHI)  
上越教育大学・学校教育研究科・教授  
研究者番号: 80251867

清水 紀宏 (SHIMIZU NORIHIRO)  
福岡教育大学・教育学部・教授  
研究者番号: 50284451

岡崎 正和 (OKAZAKI MASAKAZU)  
岡山大学・教育学研究科・准教授  
研究者番号: 40303193