様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月 １８ 日現在

機関番号：１０１０３
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2010～2013
課題番号：２２５４０００４
研究課題名（和文）置換表現の個数に関するｐ進的性質の研究

研究課題名（英文）Research on p-adic properties of the numbers of permutation representations

研究代表者
竹ケ原　裕元（TAKEGAHARA, Yugen）

室蘭工業大学・工学（系）研究科（研究院）・教授

研究者番号：１０２１１３５１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,300,000円、（間接経費）　　990,000円

研究成果の概要（和文）：３つの結果がある。１）有限アーベル群から対称群への準同型の個数に関するp進的な性質が得られた。特に、その数達を割り切るpのべき数が明らかになった。６種類の結果がある。２）交代群や位数2の巡回群の交代群による環積におけるインボリューションの個数に1を加えた数を割り切る2のべき数が2進整数で記述された。３）２つの巡回p群の直積から位数pの巡回群の対称群による環積への準同型の個数に関するp進的な性質が得られた。対称群への準同型の個数に関する結果と深く関係している。

研究成果の概要（英文）：There are three results. 1) p-adic properties of the number of homomorphisms from a finite abelian p-group to symmetric groups were obtained. In particular, the exponent of p of the decomposition of such numbers into prime factors was made clear. There are 6 different types of the results. 2) The exponent of 2 in the decomposition of one plus the number of involutions in alternating groups or wreath products of a cyclic group of order 2 by alternating groups groups into prime factors could be described as 2-adic integers. 3)p-adic properties of the number of homomorphisms from the direct product of two cyclic p-groups to wreath product of a cyclic p-group by symmetric groups were obtained. The results are closely related to that for the number of homomorphisms to symmetric groups.

研究分野：群論

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：準同型　対称群　交代群　環積　p進的性質

1．研究開始当初の背景

（1）1950 年代に、有限巡回群から n 次対称群への準同型の個数に関して、指数型母関数を用いた研究が行われた。1980 年代に，素数 p に対して得られた p 進的性質は p 進解析における指数型関数の収束域と密接に関係しており、p 進解析を用いた研究の可能性を示唆していた。

（2）近年、p 進指数関数に注目する研究手法が有効に働き、p 進解析理論に関連する結果が得られている。また、この種の研究では、偶数位数の有限巡回群から交代群への準同型の個数に関しても、興味深い結果が得られると考えられている。

2．研究の目的

本研究では、有限アーベル p 群から n 次対称群への準同型の個数を p 進解析関数の値として捉え、さらに、p が割り切る p のべき指数に関して明確な説明を与えることを目的とする。また、幾つかの関連する研究も行う。

（1）巡回群 p 群から n 次対称群への準同型の個数に関する p 進的性質を有限アーベル p 群から n 次対称群への準同型の個数に関する p 進的性質に拡張することを目的とする。特に、2 つの巡回 p 群の直積からの準同型の個数について、幾つかの場合に、p 進的性質がが得られているので、それらの結果を一般化する。

（2）n 次交代群や位数 2 の巡回群の n 次交代群による環積における $x^2=1$ の解の個数を割り切る 2 のべき数についても 2 進的な性質を得る。

（3）2 つの巡回 p 群の直積から位数 p の巡回群の n 次対称群による環積への準同型の個数について、p 進的性質を考察する。

3．研究の方法

（1）K.Conrad により巡回 p 群の場合に用いられた方法を、２つの巡回 p 群の直積の場合に応用する。この場合に得られる結果は一般の有限アーベル p 群から n 次対称群への準同型の個数に関する結果の予想を与える。

（2）一般の有限アーベル p 群から n 次対称群への準同型の個数に関する指数型母関数の利用法を研究し、p 進解析的結果を導く。その際には有限アーベル p 群の部分群の個数に関する漸化式などを詳細に分析し、指数型母関数に関する可能な変形について、必要な結果を得る。

（3）（1）、（2）で用いる手法を位数 p の巡回群の n 次対称群による環積への準同型の個数に関する研究に応用する。この場合には指数型母関数の特性を十分に生かす式変形を見つける必要がある。

（4）位数 2 の巡回群から交代群への準同型の個数について、まずその指数型母関数の特性について研究し、その個数を割り切る 2 のべき数に関する 2 進解析的な結果を得る。

（5）（4）で用いる手法を応用し、巡回 2 群から位数 2 の巡回群の n 次交代群による環積への準同型の個数を割り切る 2 のべき数に関する 2 進解析的な結果を得る。

4．研究成果

（1）有限アーベル p 群から n 次対称群への準同型の個数を、ほとんどの場合に、p 進解析関数の値として捉え、さらに、p が割り切る p のべき指数に関してより具体的な説明が得られた。位数 q と位数 r、ただし q は r 以上、の 2 つの巡回 p 群からの準同型の個数に関しては、$p>3$ または $p=3$ かつ $q>3r$ または $q=3r=3$ の場合には統一的結果が得られたが、その他の場合には i）$p=3$ かつ $q=3r>3$ または $q=r=1$ ii）$p=2$ かつ $q>4r>4$ または $q>2v=2$ iii）$p=2$ かつ $q=4r>4$ または $q=2r=2$ iv）$p=3$ かつ $q=r>1$ v）$p=2$ かつ $q=2r>2$ または $q=r=1$ vi）$p=2$ かつ $q=r>1$ の 6 通りの場合に結果が得られた。特に、v)を除く場合に p 進解析関数の値として捉えられた。このようにして得られた結果が一般の有限アーベル p 群からの準同型の個数の場合にも以下の様に拡張された。位数 p^s の有限アーベル p 群 P について、その型を $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r)$、$s=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_r$、として、$u=\mathrm{Max}\{\lambda_1,[(s+1)/2]\}$とおく。ここで[ ]は中の実数を超えない最大の整数を表す。また $p=2$ のときは $u=s-u+1>1$ ではないとする。このとき、P から n 次対称群への準同型の個数 $h_n(P)$が、$p^{k(u,v)}$未満の各非負整数 r に対するある p 進解析関数 $f_r(X)\in Z_p\langle X\rangle$および ある p 進解析関数$\eta(X)\in Z_p\langle X\rangle$によって、$h_n(P)=p^{\tau(n-r,u,v)}f_r(y)\Pi_{1\leqq j\leqq y}\eta(j)$、$n=p^{k(u,v)}y+r$ 、と表される。ここで、$Z_p\langle X\rangle$は形式的べき級数 $\Sigma_{n\geqq 0}a_nX^n$ で $|a_n|_p\to 0$ $(n\to 0)$を満たすもの全体の集合を表し、さらに $k(u,v)=u+3$（$p=2$ かつ $u=v>0$ のとき）、$k(u,v)=u+2$（$p=3$ かつ $u=v>0$ のとき）、$k(u,v)=u+1$（その他のとき）、$\tau(n,u,v)=[n/2]+[n/2^2]+\cdots+[n/2^u]+[n/2^{u+2}]-[n/2^{u+3}]$（$p=2$ かつ $u=v>0$ のとき）、$\tau(n,u,v)=[n/p]+[n/p^2]+\cdots+[n/p^u]-(u-v)[n/p^{u+1}]$（その他のとき）である。また $h_n(P)$を割り切る p のべき数は $n=p^{k(u,v)}y+r$ のとき $p^{\tau(n-r,u,v)}f_r(y)$を割り切る p のべき数となる。

（2）（1）の応用として、特に、位数 4 の巡回群から n 次対称群への準同型の個数 $a_n(4)$を割り切る 2 のべき数 $\mathrm{ord}_2(a_n(4))$を次のように決定した。任意の非負整数 y に対して、$\mathrm{ord}_2(a_{8y+r}(4))-4y$ は $r=0$、1、2、3、4、5、6、7 に対してそれぞれ、0、0、1、2、4、3、8、4 である。特に $r=6$ の場合に（1）での結果が用いられた。

（3）位数p^uの巡回群から位数pの巡回群のn次対称群による環積への準同型の個数$b_n(p^u)$をp進解析関数の値として捉えた。特に$b_n(p)$を割り切るpのべき数は$n-[n/p]$に一致する。また、位数4、8の巡回群から位数2の巡回群のn次対称群による環積への準同型の個数$b_n(4)$、$b_n(8)$を割り切る2のべき数$ord_2(b_n(4))$、$ord_2(b_n(8))$を決定し、n次対称群への準同型の個数に関する結果との類似性が明らかになった。具体的には、$n=2y+s=4z+t$、ここでsはnを2で割った剰余でありtはnを4で割った剰余、のとき$ord_2(b_n(4))=n+y-2z+\delta_{t3}$が成り立ち、任意の非負整数$y$に対して、$ord_2(b_{8y+r}(8))-11y-r$、$1\leqq r\leqq 7$は$ord_2(a_{8y+r}(4))-4y$と同じ値をとることがわかった。

（4）位数2の巡回群からn次交代群への準同型の個数$t_n(2)$を割り切る2のべき数$ord_2(t_n(2))$について、nが4を法として1のとき、$ord_2(t_{4y+1}(2))=y+\chi_o(y)(ord_2(y+b)+1)$ $(y=0,1,2,\cdots)$を満たす2進整数bが存在するというD.KimとJ.S.Kimによる予想を肯定的に解決した。ここで、$\chi_o(y)=1$（yが奇数のとき）、$\chi_o(y)=0$（yが偶数のとき）である。計算で、$b\equiv 1+2+2^3+2^8+2^{10}+2^{12} \bmod 2^{14}$がわかる。また、この結果の拡張として、位数$k=2^u(>2)$の巡回群から$n$次交代群への準同型の個数$t_n(2^u)$を割り切る2のべき数$ord_2(t_n(k))$に関して次の結果を得た。

a)　$r=0$または$r=1$ならば、$ord_2(t_{2ky+r}(k))=(2k-u-2)y+\chi_o(y)(ord_2(y+b_r)+u)$が任意の非負整数$y$に対して成り立つような2進整数$b_r$が存在する。

b)　$u=2$の場合、$b_0\equiv 1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^7+2^9+2^{10}+2^{12}+2^{13}+2^{14}+2^{15} \bmod 2^{17}$、$b_1\equiv 1+2+2^4+2^7+2^8 \bmod 2^{12}$であり、さらに、$\chi_e(y)=1-\chi_o(y)$とすれば、任意の非負整数$y$に対して、

i）$ord_2(t_{8y+2}(4))=ord_2(t_{8y+3}(4))=4y$、
ii）$ord_2(t_{8y+4}(4))=4y+2$、
iii）$ord_2(t_{8y+5}(4))=4y+3+\chi_e(y)$、
iv）$ord_2(t_{8y+6}(4))=4y+3$、
v）$ord_2(t_{8y+7}(4))=4y+4+\chi_e(y)$

となる。

（5）（4）で用いた手法を応用し、位数$k=2^u$の巡回群から位数2の巡回群のn次交代群による環積への準同型の個数$q_n(2^u)$を割り切る2のべき数$ord_2(q_n(k))$に関する結果を得た。n次交代群への準同型の個数を割り切る2のべき数の結果との類似性が明らかになった。具体的には以下の結果を得た。

a)　$r=0,1$のとき、任意の非負整数yに対して、$ord_2(q_{2y+r}(2))=y+\delta_{r1}+\chi_o(y)$が成り立つ。

b)　任意の非負整数yに対して、

i）$ord_2(q_{4y}(4))=4y+2\chi_o(y)$
ii）$ord_2(q_{4y+2}(4))=4y+2$
iii）$ord_2(q_{4y+3}(4))=4y+3$

が成り立ち、さらに$ord_2(q_{4y+1}(4))=4y+1+\chi_o(y)(ord_2(y+b)+3)$を満たす2進整数$b$が存在する。計算で、$b\equiv 1+2+2^3+2^4+2^6+2^7+2^8 \bmod 2^{13}$がわかる。

c)　$r=0$または$r=1$ならば$ord_2(q_{ky+r}(k))=(2k-u-2)y+r+\chi_o(y)(ord_2(y+b_r)+u+1)$が任意の非負整数$y$に対して成り立つような2進整数$b_r$が存在する。

d)　$u=3$の場合、$b_0\equiv 1+2+2^2+2^3+2^4+2^6+2^8+2^9 \bmod 2^{12}$、$b_1\equiv 1+2^3+2^4+2^5+2^6+2^8+2^{10}+2^{11}+2^{12} \bmod 2^{14}$であり、さらに、任意の非負整数$y$に対して、

i）$ord_2(q_{8y+2}(8))=11y+2$
ii）$ord_2(q_{8y+3}(8))=11y+3$、
iii）$ord_2(q_{8y+4}(8))=11y+6$、
iv）$ord_2(q_{8y+5}(8))=11y+8+\chi_e(y)$、
v）$ord_2(q_{8y+6}(8))=11y+9$、
vi）$ord_2(q_{8y+7}(8))=11y+11+\chi_e(y)$

となる。

（6）（1）で用いた手法を応用し、2つの巡回p群の直積Pから位数pの巡回群のn次対称群による環積への準同型の個数$h_n(P)$を、ほとんどの場合に、p進解析関数の値として捉え、さらに、pが割り切るpのべき数$ord_p(h_n(P))$に関して具体的な説明が得られた。位数qと位数r、ただしqはr以上で$q>1$、の2つの巡回p群の直積からの準同型に関しては、$p>3$または$p=3$かつ$q>3r$の場合には統一的結果が得られたが、その他の場合にはi）$p=3$かつ$q=3r>3$ ii）$p=2$かつ$q>4r>4$または$q>2r=2$ iii）$p=2$かつ$q=4r>4$または$q=2r=2$ iv）$p=3$かつ$q=r$ v）$p=2$かつ$q=2r>2$ vi）$p=2$かつ$q=r>1$の6通りの場合に結果が得られた。とくに、v)，vi)を除く場合にp進解析関数の値として捉えられた。さらに$ord_p(h_n(P))$に関して以下の結果を得た。

a)　Pが位数p^uの巡回群と位数p^vの巡回群($u\geqq v$、$u\geqq 1$）の直積のとき、$ord_p(h_n(P))\geqq n+[n/2]+[n/2^2]+\cdots+[n/2^{u-1}]-(u-v)[n/2^u]$であり、$p=2,u=v$の場合を除いて、$n$が$2^u$の倍数のときに等式が成り立つ。

b)　$p=2,u=v$の場合は$ord_2(h_n(P))\geqq n+[n/2]+[n/2^2]+\cdots+[n/2^{u-1}]+[n/2^{u+1}]-[n/2^{u+2}]$であり、$n$が$2^{u+2}$の倍数のときに等式が成り立つ。

これらの結果はPから対称群への準同型の個数に関する結果と極めて類似している。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　３件）

①　Y. Takegahara,
Induction formulae for Mackey functors with applications to representations of the twisted quantum double of a finite group,
J. Algebra 410 (2014), 85--147.
DOI: 10.1016/j.jalgebra.2014.03.017
査読有

② T. Asai, N. Chigira, T. Niwasaki, and Y. Takegahara,
On a theorem of P. Hall,
J. Group Theory 16 (2013), 69--80.
査読有

③ Y. Takegahara,
Multiple Burnside rings and Brauer induction formulae,
J. Algebra 324 (2010), 1656--1686.
DOI: 10.1016/j.jalgebra.2010.05.021
査読有

〔学会発表〕（計　４件）

① 竹ヶ原裕元
2-adic properties of the number of solutions of x^m=1 in the alternating group A_n
有限群とその表現，頂点作用素代数，代数的組合わせ論の研究
京都大学数理解析研究所
（２０１４年，３月３日～６日）

② 竹ヶ原裕元
The crossed and monomial Burnside rings
第５８回代数学シンポジウム，
広島大学
（２０１３年，８月２６日～２９日）

③ 竹ヶ原裕元
バーンサイド環の一般化とその応用
有限群とその表現，頂点作用素代数，組合せ論の研究
京都大学数理解析研究所
（２０１２年，３月５日～７日）

④ 竹ヶ原裕元
Generalizations of Burnside ring and their applications
研究会名　頂点作用素代数・有限群・組合せ論の研究，
京都大学数理解析研究所
（２０１０年，１２月１３日～１７日）

６．研究組織
(1)研究代表者
竹ヶ原　裕元　(TAKEGAHARA, Yugen)
室蘭工業大学・工学研究科・教授
研究者番号：１０２１１３５１